

Методы анализа электрических машин

Электромеханическое преобразование энергии

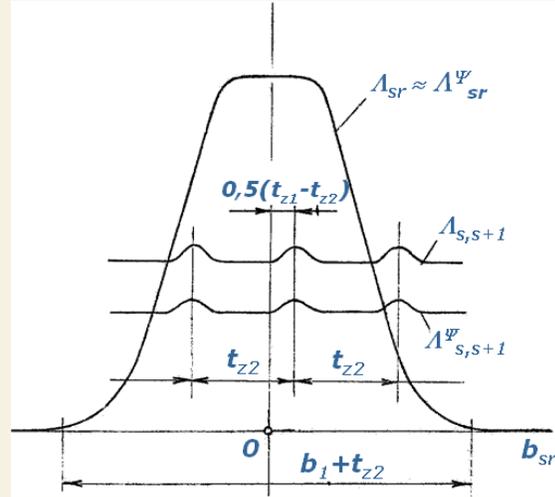
МА-03

2023

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

По МЗК составлена эквивалентная схема замещения магнитной цепи ненасыщенной электрической машины

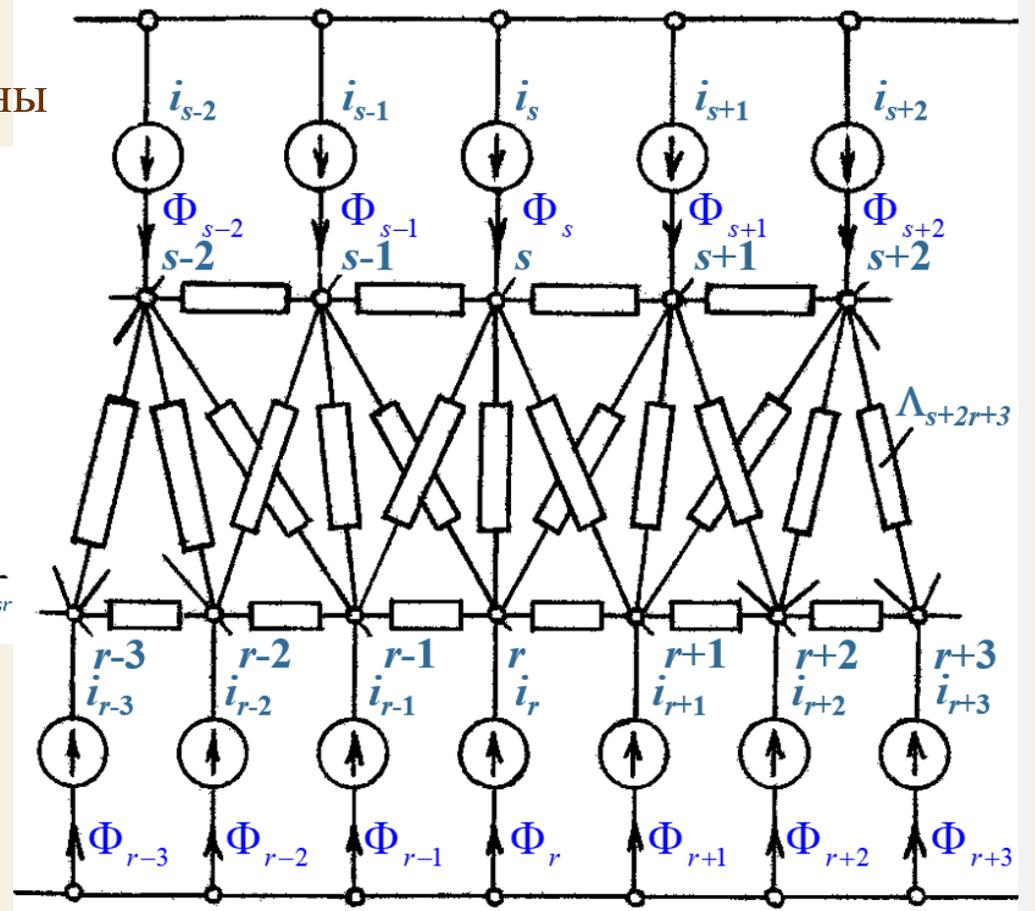
Параметры ветвей найдены по заранее рассчитанным кривым $\Lambda_{sr} = f(b_{sr})$



Для мгновенных значений токов фаз рассчитаны источники МДС

$$\bar{i} = [F] \bar{i}_B$$

Рассчитав схему можно найти потоки и потокосцепления обмоток с точностью, равной точности полевого расчета



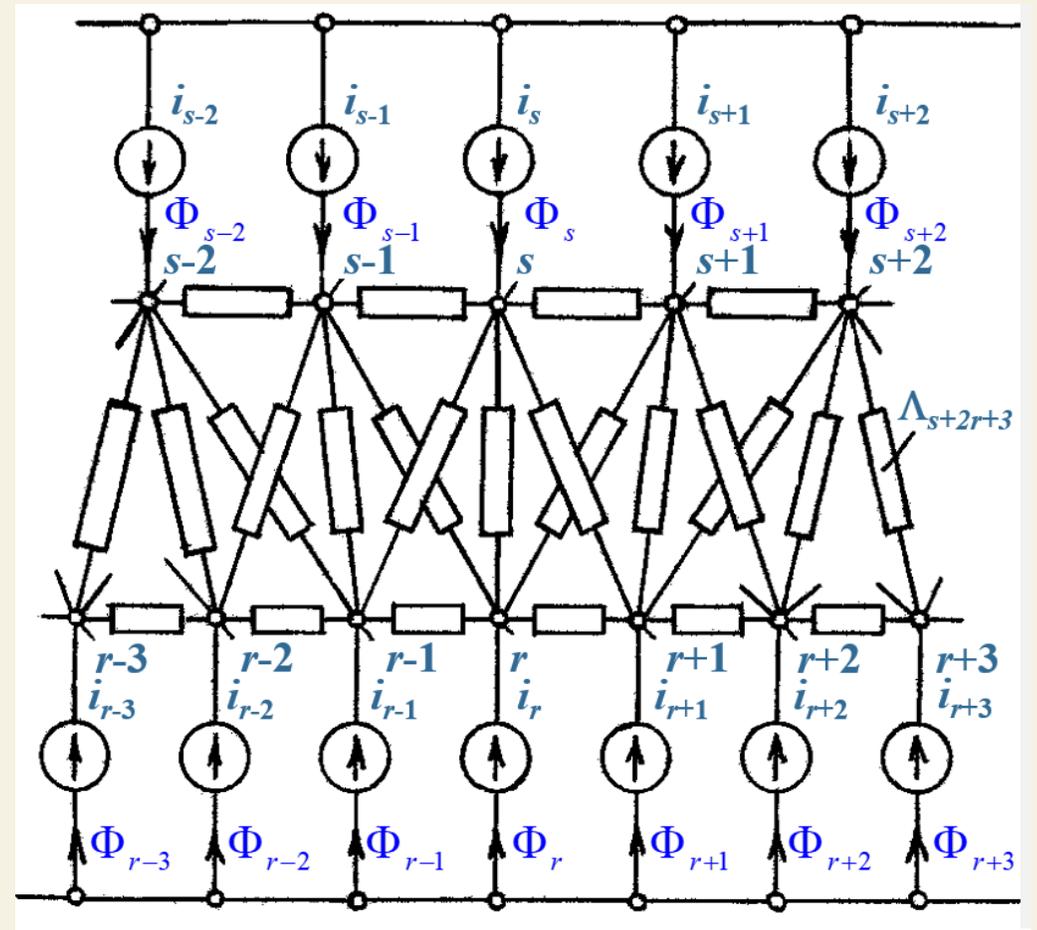
Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

При анализе магнитной цепи ненасыщенной ЭМ
($\mu_{ст} = \infty \rightarrow \Lambda_{ст} = \infty$) эквивалентная схема замещения
является линейной цепью
→ можно рассчитать ее аналитически

Найдем поток зубца s

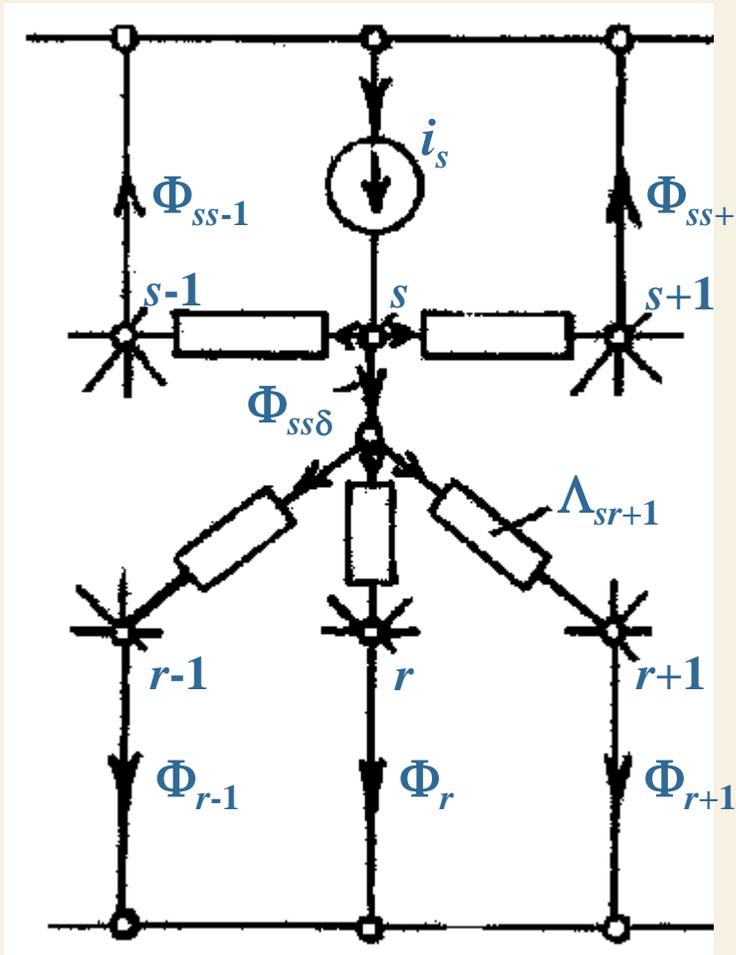
В зубце s действует сумма магнитных потоков:

- поток самоиндукции, созданный током ЗК i_s
- потоки взаимной индукции с контуром s , созданные токами всех прочих ЗК



Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Найдем поток зубца s



- поток самоиндукции, созданный током ЗК i_s $\Phi_{ss\delta} + \Phi_{ss+1} + \Phi_{ss-1}$

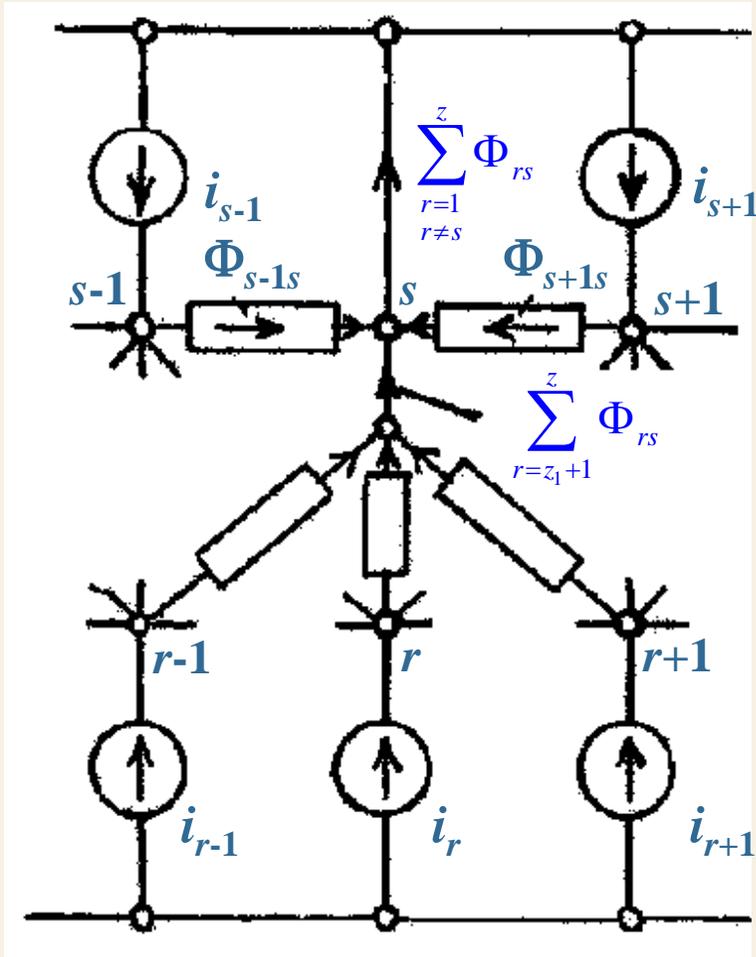
$$\Phi_{ss\delta} = \Lambda_{ss\delta} i_s = - \sum_{r=z_1+1}^z \Lambda_{sr} i_s$$

$$\Phi_{ss+1} + \Phi_{ss-1} = -\Lambda_{ss+1} i_s - \Lambda_{ss-1} i_s = - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^{z_1} \Lambda_{sm} i_s = \Lambda_{ss\sigma} i_s = \Phi_{ss\sigma}$$

$$\Phi_{ss\delta} + \Phi_{ss\sigma} = - \sum_{r=z_1+1}^z \Lambda_{sr} i_s - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^{z_1} \Lambda_{sm} i_s = - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^z \Lambda_{sm} i_s = \Lambda_{ss} i_s$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Найдем поток зубца s



- поток самоиндукции, созданный током ЗК i_s $\Phi_{ss\delta} + \Phi_{ss+1} + \Phi_{ss-1}$

$$\Phi_{ss\delta} = \Lambda_{ss\delta} i_s = \sum_{r=z_1+1}^z \Lambda_{sr} i_s$$

$$\Phi_{ss+1} + \Phi_{ss-1} = -\Lambda_{ss+1} i_s - \Lambda_{ss-1} i_s = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^{z_1} \Lambda_{sm} i_s = \Lambda_{ss\sigma} i_s = \Phi_{ss\sigma}$$

$$\Phi_{ss\delta} + \Phi_{ss\sigma} = -\sum_{r=z_1+1}^z \Lambda_{sr} i_s - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^{z_1} \Lambda_{sm} i_s = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^z \Lambda_{sm} i_s = \Lambda_{ss} i_s$$

- потоки взаимоиндукции с контуром s , созданные токами всех прочих ЗК

$$\sum_{r=z_1+1}^z \Phi_{rs} + \Phi_{s+1s} + \Phi_{s-1s} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^z \Phi_{rs} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^z \Lambda_{rs} i_r$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Найдем поток зубца s

$$\Phi_s = \Phi_{ss\delta} + \Phi_{ss\sigma} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^z \Phi_{rs} = \Lambda_{ss} i_s + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^z \Lambda_{rs} i_r = \sum_{r=1}^z \Lambda_{rs} i_r = \sum_{r=1}^z \Lambda_{sr} i_r$$

Это справедливо для любого зубца любого сердечника

Потоки всех зубцов ЭМ (в матричной форме)

$$\bar{\Phi} = [\Lambda] \bar{i}$$

$z \times 1 \quad z \times z \quad z \times 1$

$\bar{\Phi}$ – вектор потоков зубцов

\bar{i} – вектор токов зубцовых контуров

$[\Lambda]$ – матрица проводимостей зубцовых контуров
(проводимости для потоков)

Λ_{sm} (при $s \neq m$) – проводимость для потока взаимоиндукции
между контурами s и m (значение $\Lambda_{sm} < 0$)

Λ_{ss} (при $s = m$) – проводимость для потока самоиндукции
контура s (значение $\Lambda_{ss} > 0$)

Проверим: для любого зубца m

$$\Phi_m = \sum_{r=1}^z \Lambda_{mr} i_r$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Найдем потокосцепление зубцового контура s

$$\Psi_s = \Phi_s w_k = \Phi_s$$

Используем ту же схему замещения, но содержащую проводимости Λ^Ψ (для потокосцеплений)

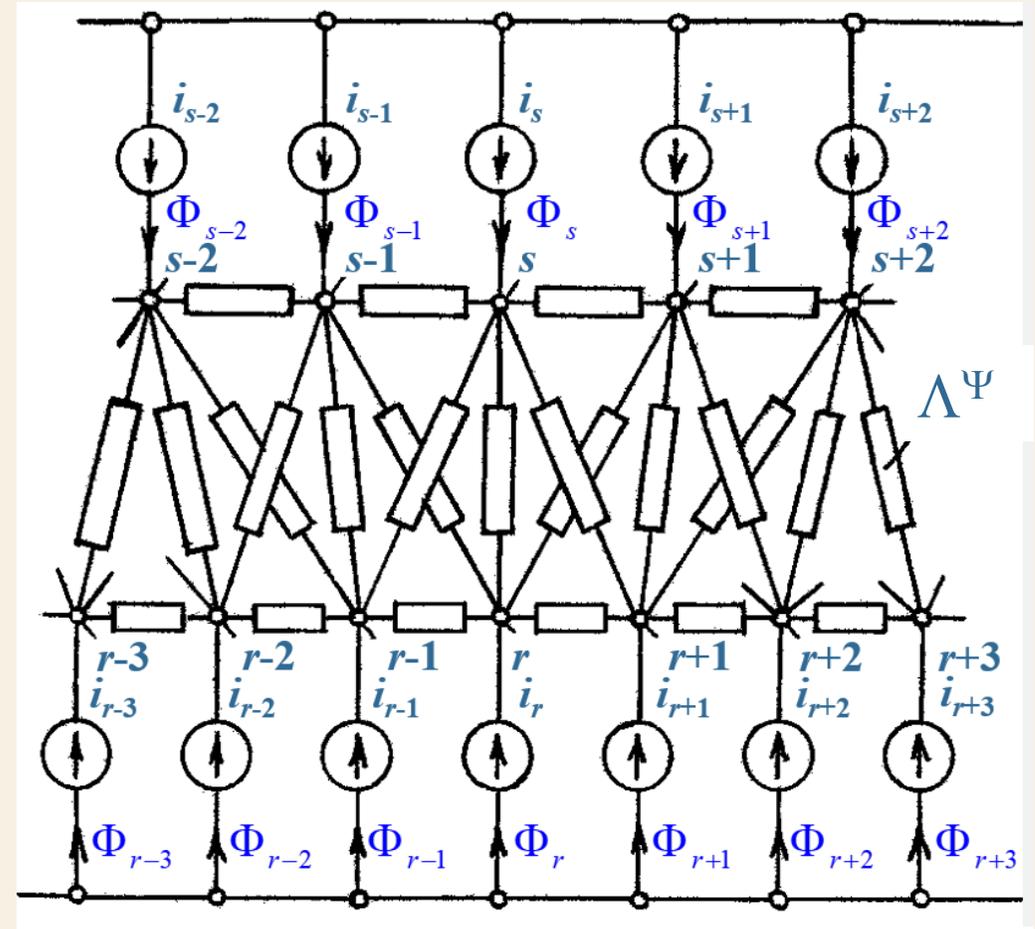
Тогда потокосцепление зубцового контура s

$$\Psi_s = \sum_{r=1}^z \Lambda_{sr}^\Psi i_r$$

Потокосцепления всех зубцов контуров ЭМ
(в матричной форме)

$$\bar{\Psi} = [\Lambda^\Psi] \bar{i}$$

$[\Lambda^\Psi]$ – матрица проводимостей зубцовых контуров
(проводимости для потокосцеплений)



Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Потокосцепления зубцовых контуров $\bar{\Psi} = [\Lambda^\Psi] \bar{i}$

Λ_{sm}^Ψ (при $s \neq m$) – проводимость для потокосцепления взаимоиндукции контура s , обусловленного током контура m (и наоборот)

Если контуры s и m находятся на разных сердечниках, то $\Lambda_{sm}^\Psi = \Lambda_{sm}$

Для соседних контуров ($m = s \pm 1$, пазовое рассеяние) $\Lambda_{ss \pm 1}^\Psi < \Lambda_{ss \pm 1}$

Λ_{ss}^Ψ (при $s = m$) – проводимость для потокосцепления самоиндукции контура s

$$\Lambda_{ss}^\Psi = \Lambda_{ss\delta}^\Psi - \Lambda_{ss+1}^\Psi - \Lambda_{ss-1}^\Psi = \Lambda_{ss\delta} - \Lambda_{ss+1}^\Psi - \Lambda_{ss-1}^\Psi$$

Частный случай: потокосцепления контуров 1 сердечника, созданные токами только этого же сердечника

$$\bar{\Psi}_1 = [\Lambda_1^\Psi] \bar{i}_1$$

Аналогично для потокосцеплений контуров 2 сердечника, созданных токами только этого же сердечника

$$\bar{\Psi}_2 = [\Lambda_2^\Psi] \bar{i}_2$$

Но матрица проводимостей

$$[\Lambda^\Psi] = \left[\begin{array}{c|c} [\Lambda_1^\Psi] & [\Lambda_{12}^\Psi] \\ \hline [\Lambda_{21}^\Psi] & [\Lambda_2^\Psi] \end{array} \right]$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример:

- Электрическая машина имеет $z_1 = 12$ зубцов на сердечнике 1 и $z_2 = 17$ зубцов на сердечнике 2. Ось зубца 7 сердечника 1 совпадает с осью зубца 20 сердечника 2
- Найти поток Φ_7 в основании зубца 7 и потокосцепление Ψ_7 зубцового контура 7, если отличаются от 0 только следующие проводимости взаимной индукции с контуром 7:
 - $\Lambda_{7,8} = \Lambda_{7,6} = -\mu_0 \cdot 0,3$ Гн
 - $\Lambda_{7,8}^{\Psi} = \Lambda_{7,6}^{\Psi} = -\mu_0 \cdot 0,2$ Гн
 - $\Lambda_{7,20} = \Lambda_{7,20}^{\Psi} = -\mu_0 \cdot 2$ Гн
 - $\Lambda_{7,21} = \Lambda_{7,21}^{\Psi} = \Lambda_{7,19} = \Lambda_{7,19}^{\Psi} = -\mu_0 \cdot 0,1$ Гн
- При определении Φ_7 и Ψ_7 полагать известными полные токи зубцовых контуров: $i_6 = -300$ А; $i_7 = 800$ А; $i_8 = 900$ А; $i_{19} = 500$ А; $i_{20} = 400$ А; $i_{21} = 300$ А

Нарисуем схему замещения с указанным расположением ветвей

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример:

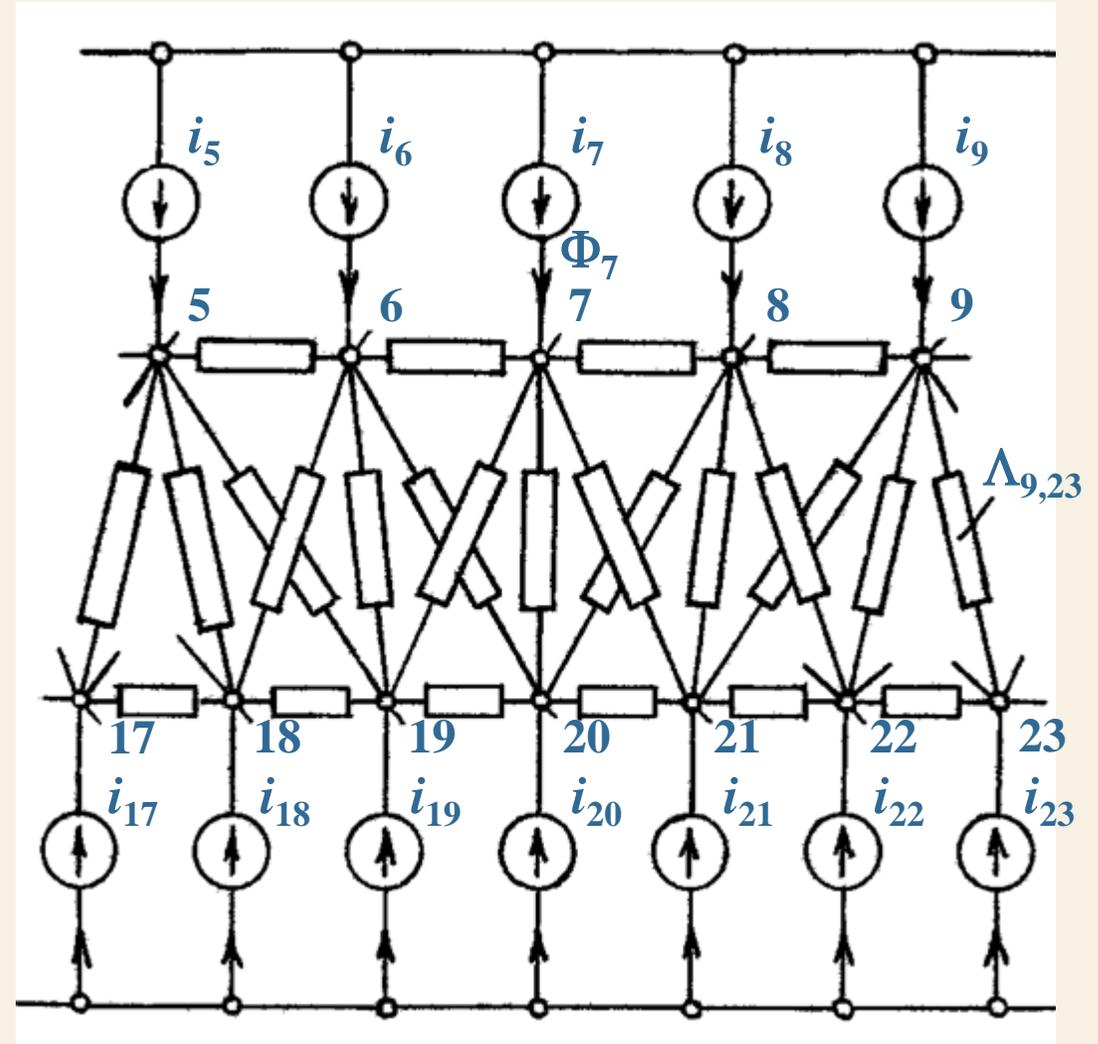
Ось зубца 7 совпадает с осью зубца 20

Проводимость для потока самоиндукции контура 7

$$\begin{aligned} \Lambda_{7,7} &= -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 7}}^z \Lambda_{sm} = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 7}}^{29} \Lambda_{7,m} \\ &= -(\Lambda_{7,6} + \Lambda_{7,8} + \Lambda_{7,19} + \Lambda_{7,20} + \Lambda_{7,21}) \\ &= -\mu_0 (-0,3 - 0,3 - 0,1 - 2,0 - 0,1) = 2,8\mu_0 \text{ Гн} \end{aligned}$$

Проводимость для потокосцепления самоиндукции контура 7

$$\begin{aligned} \Lambda_{7,7}^{\Psi} &= -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 7}}^z \Lambda_{sm}^{\Psi} = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 7}}^{29} \Lambda_{7,m}^{\Psi} \\ &= -(\Lambda_{7,6}^{\Psi} + \Lambda_{7,8}^{\Psi} + \Lambda_{7,19}^{\Psi} + \Lambda_{7,20}^{\Psi} + \Lambda_{7,21}^{\Psi}) \\ &= -\mu_0 (-0,2 - 0,2 - 0,1 - 2,0 - 0,1) = 2,6\mu_0 \text{ Гн} \end{aligned}$$



Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример:

Поток в основании зубца 7

$$\begin{aligned}\Phi_7 &= \sum_{m=1}^z \Lambda_{sm} i_m = \Lambda_{7,6} i_6 + \Lambda_{7,7} i_7 + \Lambda_{7,8} i_8 + \Lambda_{7,19} i_{19} + \Lambda_{7,20} i_{20} + \Lambda_{7,21} i_{21} \\ &= \mu_0 (-0,3(-300) + 2,8 \cdot 800 - 0,3 \cdot 900 - 0,1 \cdot 500 - 2 \cdot 400 - 0,1 \cdot 300) \\ &= 1180\mu_0 = 0,00148 \text{ Вб}\end{aligned}$$

Потокоцепление зубцового контура 7

$$\begin{aligned}\Psi_7 &= \sum_{m=1}^z \Lambda_{sm}^\Psi i_m = \Lambda_{7,6}^\Psi i_6 + \Lambda_{7,7}^\Psi i_7 + \Lambda_{7,8}^\Psi i_8 + \Lambda_{7,19}^\Psi i_{19} + \Lambda_{7,20}^\Psi i_{20} + \Lambda_{7,21}^\Psi i_{21} \\ &= \mu_0 (-0,2(-300) + 2,6 \cdot 800 - 0,2 \cdot 900 - 0,1 \cdot 500 - 2 \cdot 400 - 0,1 \cdot 300) \\ &= 1080\mu_0 = 0,00136 \text{ Вб}\end{aligned}$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример:

- Для электрической машины с 3-фазной двухслойной обмоткой на 1 сердечнике ($m_1 = 3$, $2p = 2$, $q_1 = 2$, $y = 5$, $w_k = 3$) составить матрицу проводимостей для потокосцеплений зубцовых контуров сердечника 1
- С помощью этой матрицы определить вектор потокосцеплений зубцовых контуров сердечника 1 при токах ветвей $i_{B1} = 4$ А, $i_{B2} = -2$ А, $i_{B3} = -2$ А
- Дано:
 - $\delta = 3$ мм – зазор между сердечниками
 - $l_\delta = 200$ мм – расчетная длина машины
 - $t_z = 20$ мм – зубцовое деление
 - $b_{II} = 10$ мм – ширина прямоугольных пазов
 - $h_2 = 5$ мм – расстояние от зазора до проводов с током в пазу
 - $h_1 = 25$ мм – высота паза, занятая проводниками с током
- Сердечник 2 считать гладким

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример:

При гладком сердечнике 2 матрица проводимостей содержит:

- одинаковые диагональные элементы Λ_{ss}^{Ψ}
- одинаковые кодиагональные элементы Λ_{ss+1}^{Ψ} и Λ_{ss-1}^{Ψ} (пазовое рассеяние)
- все остальные элементы равны 0

Проводимость для потокосцепления самоиндукции контура s

$$\Lambda_{ss}^{\Psi} = \Lambda_{ss\delta} - \Lambda_{ss+1}^{\Psi} - \Lambda_{ss-1}^{\Psi}$$

Проводимость взаимоиנדукции зубцового контура s при гладком сердечнике 2

→ униполярная проводимость зубцового деления

$$\Lambda_{ss\delta} = \Lambda_c = \mu_0 \frac{t_z}{\delta k_\delta} l_\delta$$

$$k_\delta = \frac{t_z}{t_z - \gamma \delta}$$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{b_n}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{b_n}{\delta}}$$

$$\gamma = 1,33$$

$$k_\delta = 1,25$$

$$\Lambda_{ss\delta} = 1,06\mu_0 \text{ Гн}$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример: Проводимость пазового рассеяния

Для открытых пазов по инженерной формуле найдем

$$\Lambda_{\text{сп}0}^{\Psi} = \mu_0 l_{\delta} \left(\frac{h_2}{b_{\text{п}}} + \frac{h_1}{3b_{\text{п}}} + \Lambda_{\sigma\Gamma} \right) k_{\beta} \quad k_{\beta} = \frac{1+3\beta}{4} \quad \beta = \frac{y}{\tau}$$

Проводимость по головкам зубцов

$$\Lambda_{\sigma\Gamma} = \frac{\delta}{b_{\text{ш}}} - \frac{1}{\pi} \left(\ln 2 + \frac{2\delta}{b_{\text{ш}}} \operatorname{arctg} \frac{2\delta}{b_{\text{ш}}} - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{2\delta}{b_{\text{ш}}} \right)^2} \right)$$

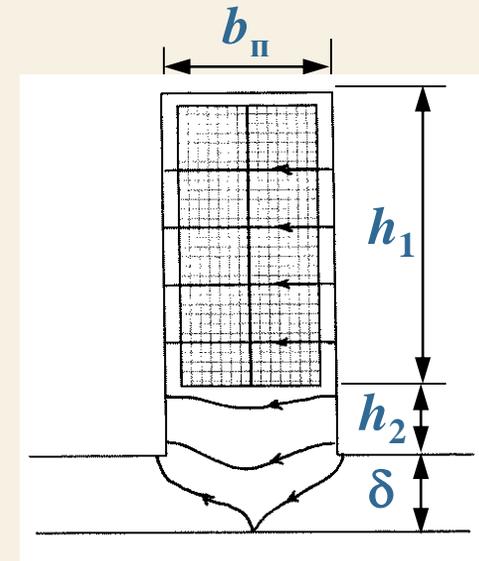
Пусть $\beta = 0,833$, $b_{\text{ш}} = b_{\text{п}}$, тогда найдем $k_{\beta} = 0,875$ $\Lambda_{\Gamma} = 0,025$ $\Lambda_{\text{сп}0}^{\Psi} = 0,272\mu_0 \text{ Гн}$

Примечание: в схеме замещения проводимость пазового рассеяния рассчитывается для поля зубцового контура (несимметричного), а инженерные формулы выведены для симметричного поля от тока в пазу

Для широких и глубоких контуров несимметрия поля рассеяния выражается в уменьшении проводимости на $\Lambda_{\theta}/2 = \ln(2)/\pi$

$$\Lambda_{\text{сп}}^{\Psi} = \Lambda_{\text{сп}0}^{\Psi} - \mu_0 l_{\delta} \frac{\ln 2}{\pi} k_{\beta} = 0,233\mu_0 \text{ Гн}$$

Итак, $\Lambda_{\text{ss}\pm 1}^{\Psi} = -\Lambda_{\text{сп}}^{\Psi} = -0,233\mu_0 \text{ Гн}$



Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример: Проводимость для потокосцепления самоиндукции контура s

$$\Lambda_{ss}^{\Psi} = \Lambda_{ss\delta} - \Lambda_{ss+1}^{\Psi} - \Lambda_{ss-1}^{\Psi} = 1,526\mu_0 \text{ Гн}$$

Составим матрицу проводимостей

$$[\Lambda_1^{\Psi}] = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A \end{bmatrix}$$

Здесь

$$A = \Lambda_{ss}^{\Psi} = 1,91 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$B = \Lambda_{ss\pm 1}^{\Psi} = -0,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

Анализ магнитной цепи – расчет схемы замещения

Пример: Найдем потокосцепления зубцовых контуров по известным токам зубцовых контуров

$$\bar{\Psi}_1 = [\Lambda_1^\Psi] \bar{i}_1$$

$$\bar{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ 30 \\ 42 \\ 42 \\ 30 \\ 12 \\ -12 \\ -30 \\ -42 \\ -42 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.76 \\ 1.76 \\ 4.15 \\ 5.91 \\ 5.91 \\ 4.15 \\ 1.76 \\ -1.76 \\ -4.15 \\ -5.91 \\ -5.91 \\ -4.15 \end{bmatrix}$$

Здесь

$$A = \Lambda_{ss}^\Psi = 1,91 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$B = \Lambda_{ss\pm 1}^\Psi = -0,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$\times 10^{-5} \text{ Вб}$

Определение потокоцеплений ветвей обмоток

Потокоцепления зубцовых контуров используем для нахождения потокоцеплений ветвей обмоток ЭМ

- поток зубца образует потокоцепление зубцового контура, охватывающего зубец
- аналогично, потоки зубцов в сумме образуют потокоцепление катушки, охватывающей эти зубцы (с учетом числа витков в катушке и направления потоков)
- т.к. поток зубца равен потокоцеплению зубцового контура, то Ψ катушки можно найти как комбинацию Ψ входящих в нее зубцовых контуров

Потокоцепление j -й электрической ветви $\Psi_{\text{в}j} = \sum_{s=1}^z c_{js} \Psi_s$

где $c_{js} \rightarrow$ сколько раз и с каким знаком потокоцепление ЗК s входит в потокоцепление j -й ветви

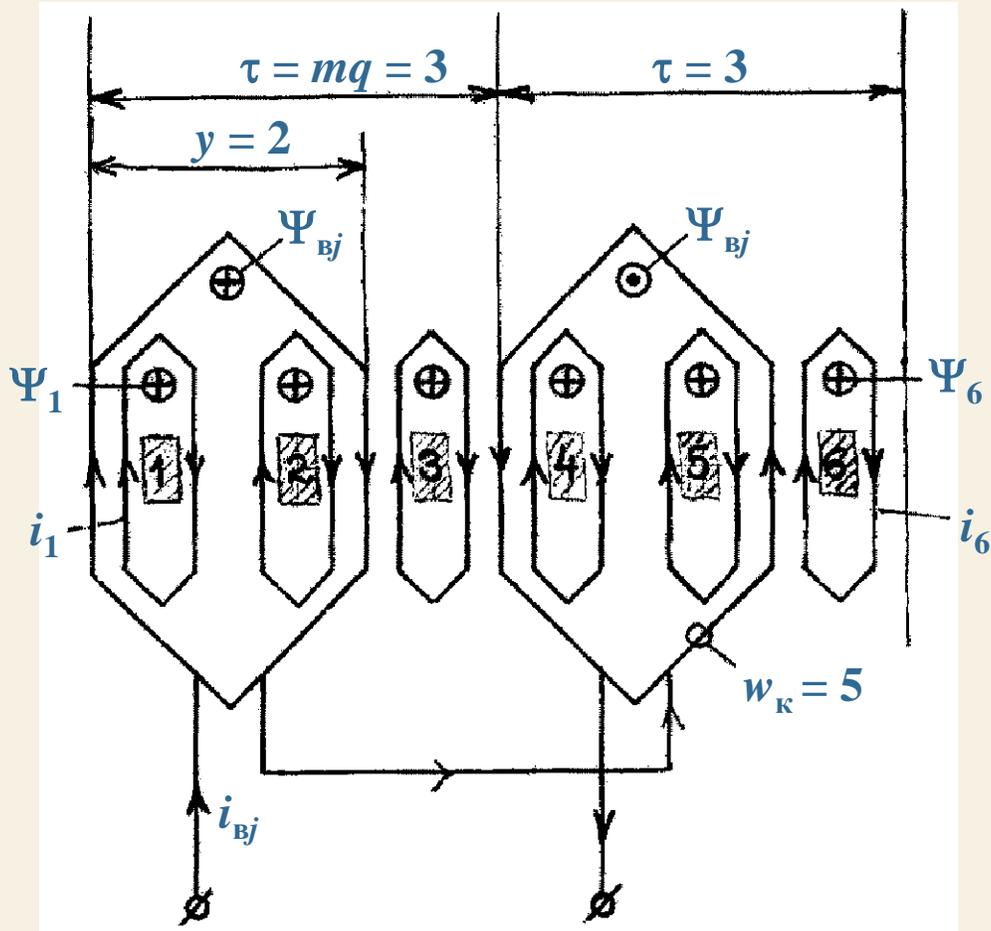
Если ЗК s охвачен k_{js} катушками j -й ветви, то

- $c_{js} = +k_{js} w_k$ при совпадении направлений Ψ_s и $\Psi_{\text{в}j}$
- $c_{js} = -k_{js} w_k$ при противоположных направлениях Ψ_s и $\Psi_{\text{в}j}$

Если ЗК s не охвачен катушками j -й ветви, то $k_{js} = 0$ и $c_{js} = 0$

Определение потокосцеплений ветвей обмоток

Рассмотрим на примере сложной обмотки с $m = 3, p = 1, q = 1, y = 2, w_k = 5$ ($z = 2pmq = 6$)



Рассмотрим ветвь j

и зубцовые контуры $s = 1 \dots 6$

Выберем положительные направления Ψ

Вклад зубцовых контуров $1 \dots 6$ в потокосцепление ветви j
 k_{js} – сколько раз и с каким знаком Ψ_s входит в Ψ_{vj}

s	1	2	3	4	5	6
k_{js}	1	1	0	-1	-1	0
c_{js}	5	5	0	-5	-5	0

Аналогично для $j = 2$ и $j = 3$, но с учетом сдвига фаз на $2/3\tau$

s	1	2	3	4	5	6
c_{1s}	5	5	0	-5	-5	0
c_{2s}	-5	0	5	5	0	-5
c_{3s}	0	-5	-5	0	5	5

Определение потокосцеплений ветвей обмоток

Потокосцепления ветвей в матричном виде

$$\bar{\Psi}_B = [C] \bar{\Psi}$$

Здесь $\bar{\Psi}_B$ – вектор потокосцеплений ветвей $[Q \times 1]$

$\bar{\Psi}$ – вектор потокосцеплений ЗК $[z \times 1]$

$[C]$ – матрица преобразования $[Q \times z]$

$$\text{Причем } [C] = \begin{bmatrix} [C_1] & 0 \\ 0 & [C_2] \end{bmatrix} \quad \text{где} \quad \begin{aligned} \bar{\Psi}_{B1} &= [C_1] \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_{B2} &= [C_2] \bar{\Psi}_2 \end{aligned}$$

Можно показать, что если $\Lambda_{ss\delta}$ всех ЗК 1 сердечника одинаковы и равны Λ_{sc} , то $[C_1] = [F_1]^T$

Аналогично, если $\Lambda_{rr\delta}$ всех ЗК 2 сердечника одинаковы и равны Λ_{rc} , то $[C_2] = [F_2]^T$

На практике используют матрицу преобразования потокосцеплений $[C] = [F]^T$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Потокосцепления ветвей обмоток ЭМ

$$\bar{\Psi}_b = [C]\bar{\Psi} = [C][\Lambda^\Psi]\bar{i} = [C][\Lambda^\Psi][F]\bar{i}_b = [L]\bar{i}_b$$

Здесь $[L] = [C][\Lambda^\Psi][F]$ – матрица индуктивностей ветвей обмоток $[Q \times Q]$

Элемент матрицы $L_{ij} = \frac{\Psi_{vij}}{i_{vj}}$ – взаимоиндуктивность между ветвями i и j

$L_{jj} = \frac{\Psi_{vjj}}{i_{vj}}$ – самоиндуктивность ветви j

Действительно, $\Psi_{vi} = \sum_{j=1}^Q L_{ij} i_{vj} = \sum_{j=1}^Q \Psi_{vij}$

В частном случае можно записать
(при возбуждении одного сердечника)

$$\Psi_{b1} = [C_1][\Lambda_1^\Psi][F_1]\bar{i}_{b1} = [L_1]\bar{i}_{b1}$$

$$\Psi_{b2} = [C_2][\Lambda_2^\Psi][F_2]\bar{i}_{b2} = [L_2]\bar{i}_{b2}$$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Особенности найденной по МЗК индуктивности

- проводимости схемы замещения учитывают поле взаимоиндукции, поле пазового и дифференциального рассеяния
но не учитывают поле лобового рассеяния

- найденные индуктивности являются мгновенными значениями:

$[C]$ и $[F]$ определяются схемой обмотки

$[\Lambda^\Psi]$ – размерами и положением сердечников

В процессе работы ЭМ $[C]$ и $[F] = \text{Const}$,

но меняется положение сердечников $\rightarrow [\Lambda^\Psi] = \text{Var} \rightarrow [L] = \text{Var}$

Для анализа электромагнитных процессов
надо знать зависимости $L = f(\alpha)$

$$[L] = [C][\Lambda^\Psi][F]$$

В дальнейших расчетах надо использовать скорректированные значения

$$L_{ii} = L_{ii}^{\text{МЗК}} + L_{ii}^{\text{л}}$$

$$L_{ij} = L_{ij}^{\text{МЗК}} + L_{ij}^{\text{л}}$$

На практике принимают $L_{ij}^{\text{л}} = 0$

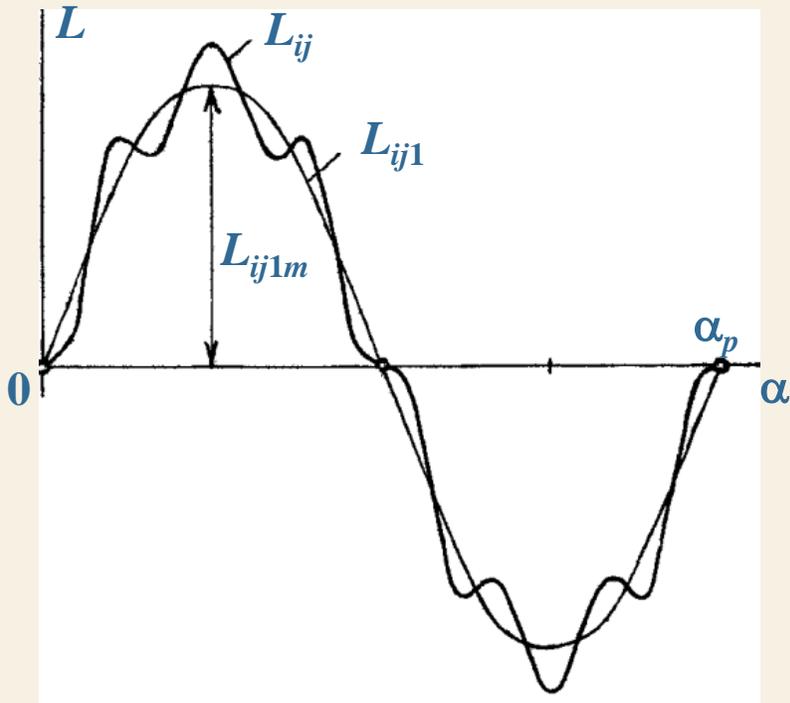
а $L_{ii}^{\text{л}}$ считают по инженерным формулам

Для этого достаточно просчитать $[L]$
по схеме замещения для разных b_{sr}
на периоде обмотки

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Существует 3 характерные зависимости $L_{ij} = f(\alpha)$

1. Если ветви i и j расположены на разных сердечниках



L_{ij} меняется с периодом $\alpha_p = \frac{2\pi}{p}$

Разложение кривой L_{ij} на гармоники:

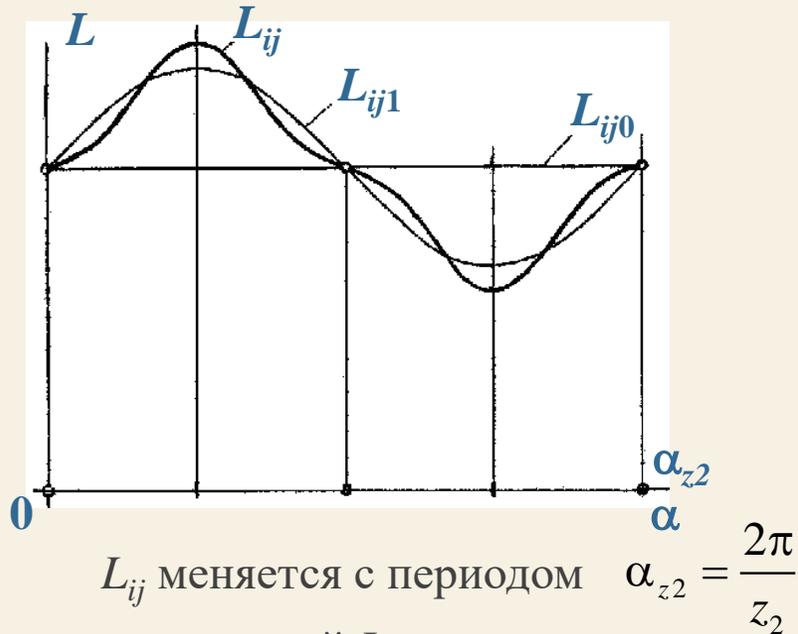
- постоянная составляющая $L_{ij0} = 0$
- первая (основная) гармоническая L_{ij1} с периодом $\alpha_p = \frac{2\pi}{p}$
- нечетные гармоники L_{ijv}

$$L_{ij}(\alpha) = \sum_v L_{ijvm} \cos(vp\alpha + \varphi_{ijv})$$

Потокоцепления и индуктивности ветвей обмоток

Существует 3 характерные зависимости $L_{ij} = f(\alpha)$

2. Если ветви i и j расположены на 1 сердечнике

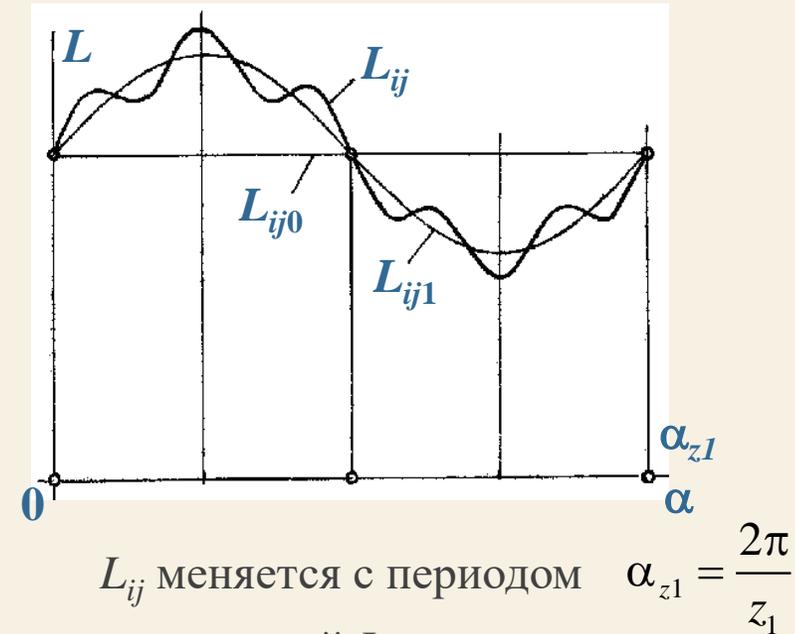


Разложение кривой L_{ij} на гармоники:

- постоянная составляющая L_{ij0}
- четные и нечетные гармоники L_{ijv}

$$L_{ij}(\alpha) = L_{ij0} + \sum_v L_{ijvm} \cos(vz_2\alpha + \varphi_{ijv})$$

3. Если ветви i и j расположены на 2 сердечнике



Разложение кривой L_{ij} на гармоники:

- постоянная составляющая L_{ij0}
- четные и нечетные гармоники L_{ijv}

$$L_{ij}(\alpha) = L_{ij0} + \sum_v L_{ijvm} \cos(vz_1\alpha + \varphi_{ijv})$$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример:

- Для электрической машины с 3-фазной двухслойной обмоткой на 1 сердечнике ($m_1 = 3$, $2p = 2$, $q_1 = 2$, $y = 5$, $w_k = 3$) составить матрицу преобразования потокосцеплений ЗК в потокосцепления ветвей $[C_1]$
- и найти с ее помощью потокосцепления ветвей сердечника 1 при токах ветвей $i_{B1} = 4$ А, $i_{B2} = -2$ А, $i_{B3} = -2$ А

Составим матрицу $[C_1]$ на основании схемы обмотки

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример:

Зубцы ЭМ $z_1 = 2pt_1q_1 = 12$

Зубцовые контуры

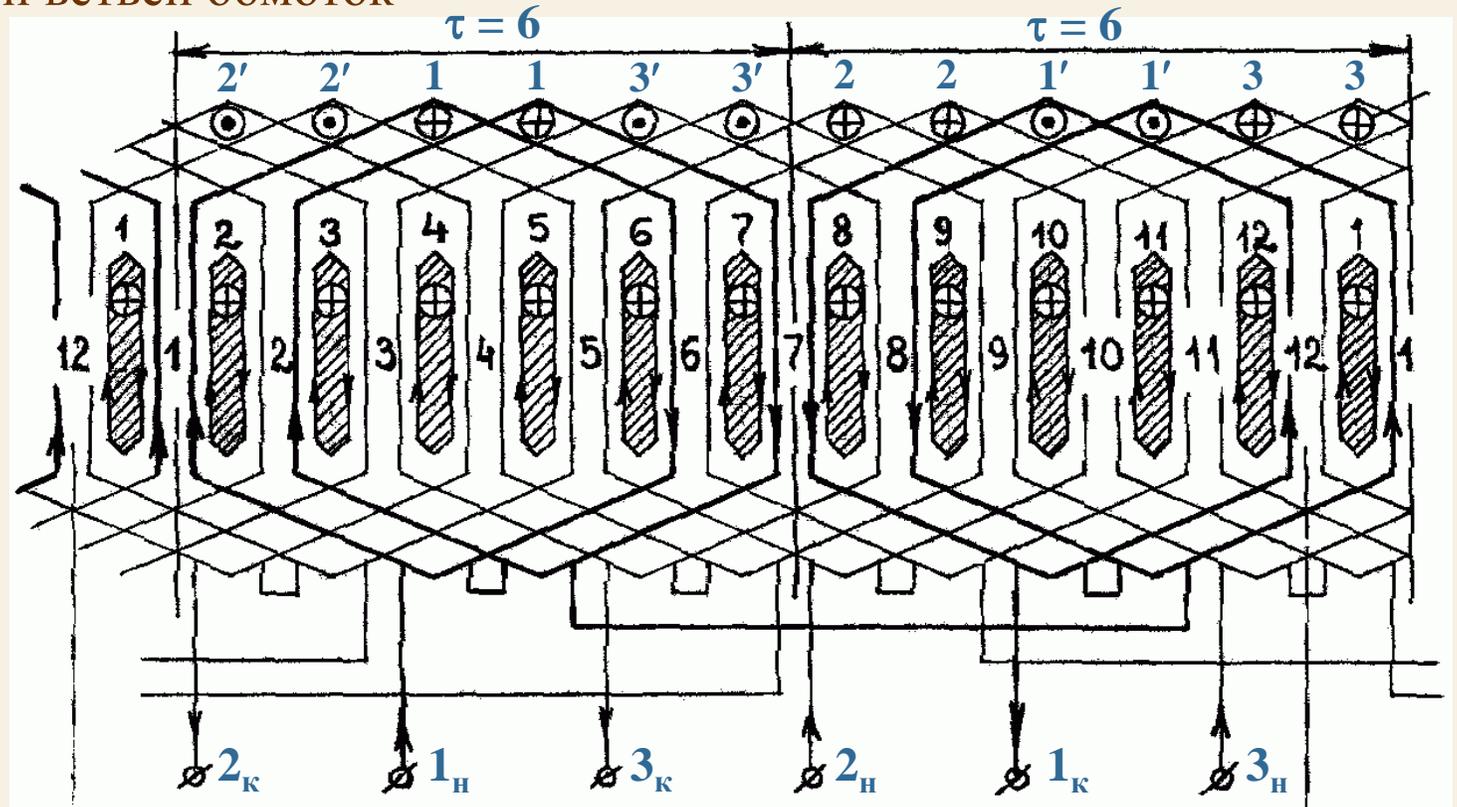
Токи и
положительные направления
потокосцеплений ветвей

- ветвь $j = 1$
- ветвь $j = 2$
- ветвь $j = 3$

$$w_k = 3$$

матрица преобразования $[C_1] =$

-3	3	6	6	6	6	3	-3	-6	-6	-6	-6
-6	-6	-6	-6	-3	3	6	6	6	6	3	-3
6	6	3	-3	-6	-6	-6	-6	-3	3	6	6



Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример:

Найдем потокосцепления ветвей

$$\bar{\Psi}_{в1} = [C_1] \bar{\Psi}_1$$

$$\bar{\Psi}_{в1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 3 & -3 & -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & -3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 3 & -3 \\ 6 & 6 & 3 & -3 & -6 & -6 & -6 & -6 & -3 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.76 \cdot 10^{-5} \\ 1.76 \cdot 10^{-5} \\ 4.15 \cdot 10^{-5} \\ 5.91 \cdot 10^{-5} \\ 5.91 \cdot 10^{-5} \\ 4.15 \cdot 10^{-5} \\ 1.76 \cdot 10^{-5} \\ -1.76 \cdot 10^{-5} \\ -4.15 \cdot 10^{-5} \\ -5.91 \cdot 10^{-5} \\ -5.91 \cdot 10^{-5} \\ -4.15 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,62 \cdot 10^{-3} \\ -1,31 \cdot 10^{-3} \\ -1,31 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad [B6]$$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример:

- Для электрической машины с 3-фазной двухслойной обмоткой на 1 сердечнике ($m_1 = 3$, $2p = 2$, $q_1 = 2$, $y = 5$, $w_k = 3$) составить матрицу индуктивностей ветвей сердечника 1 $[L_1]$
- и найти с ее помощью потокосцепления ветвей сердечника 1 при токах ветвей $i_{B1} = 4$ А, $i_{B2} = -2$ А, $i_{B3} = -2$ А

Матрица индуктивностей $[L_1] = [C_1] \cdot [\Lambda_1^\Psi] \cdot [F_1]$

Перемножение матриц:

- вначале найдем $[P_1] = [\Lambda_1^\Psi] \cdot [F_1]$
- затем $[L_1] = [C_1] \cdot [P_1]$

и тогда уже $\bar{\Psi}_{B1} = [L_1] \bar{i}_{B1}$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример: $[P_1] = [\Lambda_1^\Psi] \cdot [F_1]$

$$[P_1] = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & B \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 3 \\ 6 & -6 & -3 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -6 \\ -3 & 6 & -6 \\ -6 & 6 & -3 \\ -6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C & -D & E \\ C & -E & D \\ D & -E & C \\ E & -D & -C \\ E & -C & -D \\ D & C & -E \\ C & D & -E \\ -C & E & -D \\ -D & E & -C \\ -E & D & C \\ -E & C & D \\ -D & -C & E \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 1,91 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \\
 B &= -0,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= 4,85 \cdot 10^{-6} \\
 D &= 8,83 \cdot 10^{-6} \\
 E &= 7,96 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример:

$$[L_1] = [C_1] \cdot [P_1]$$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 3 & -3 & -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & -3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 3 & -3 \\ 6 & 6 & 3 & -3 & -6 & -6 & -6 & -6 & -3 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -C & -D & E \\ C & -E & D \\ D & -E & C \\ E & -D & -C \\ E & -C & -D \\ D & C & -E \\ C & D & -E \\ -C & E & -D \\ -D & E & -C \\ -E & D & C \\ -E & C & D \\ -D & -C & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = 4,85 \cdot 10^{-6}$$

$$D = 8,83 \cdot 10^{-6}$$

$$E = 7,96 \cdot 10^{-6}$$

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = 4,61 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$$

$$L_{12} = L_{21} = L_{13} = L_{31} = L_{23} = L_{32} = -1,96 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$$

Потокосцепления и индуктивности ветвей обмоток

Пример:

$$\bar{\Psi}_{B1} = [L_1] \cdot \bar{i}_{B1} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,62 \cdot 10^{-3} \\ -1,31 \cdot 10^{-3} \\ -1,31 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad [\text{Вб}]$$

$$L_{11}=L_{22}=L_{33} = 4,61 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$$
$$L_{12}=L_{21}=L_{13}=L_{31}=L_{23}=L_{32} = -1,96 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$$

Система уравнений электрических ветвей

Электрические ветви – ветви многофазной обмотки
(фазы или параллельные ветви фаз)

Пусть каждая ветвь подключена к независимому источнику $u_{Bi} = u_{Bi}(t)$

Уравнение равновесия напряжений i ветви $u_{Bi} = R_{Bi} i_{Bi} - e_{Bi}$

где R_{Bi} – активное сопротивление i ветви

e_{Bi} – ЭДС, индуцированная в i ветви в результате изменения потокосцепления Ψ_{Bi}

Электродвижущая сила $e_{Bi} = -\frac{d\Psi_{Bi}}{dt}$

Потокосцепление $\Psi_{Bi} = \sum_{j=1}^q L_{ij} i_{Bj}$

Здесь $i_{Bj} = i_{Bj}(t)$, $L_{ij} = L_{ij}(\alpha)$, $\alpha = \alpha(t)$

Перепишем выражение для ЭДС

Система уравнений электрических ветвей

Электродвижущая сила

$$e_{\text{в}i} = -\frac{d\Psi_{\text{в}i}}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{\text{в}j} = -\sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_{\text{в}j}}{dt} - \sum_{j=1}^{\varrho} i_{\text{в}j} \frac{dL_{ij}}{dt}$$

Здесь $-\sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_{\text{в}j}}{dt} = e_{\text{т}pi}$ – *трансформаторная ЭДС* (обусловленная изменением токов обмоток при фиксированных индуктивностях)

$-\sum_{j=1}^{\varrho} i_{\text{в}j} \frac{dL_{ij}}{dt} = e_{\text{в}pi}$ – *ЭДС вращения* (обусловленная изменением индуктивностей обмоток при фиксированных токах)

Во вращающейся машине $\frac{dL_{ij}}{dt} = \frac{dL_{ij}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dL_{ij}}{d\alpha} \Omega$

Поэтому ЭДС вращения $e_{\text{в}pi} = -\sum_{j=1}^{\varrho} i_{\text{в}j} \frac{dL_{ij}}{dt} = -\Omega \sum_{j=1}^{\varrho} i_{\text{в}j} \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$

(зависимости $L(\alpha)$ мы уже рассматривали)

Система уравнений электрических ветвей

Уравнение равновесия напряжений всей ЭМ

$$\bar{u}_B = [R_B] \bar{i}_B - \bar{e}_{тр} - \bar{e}_{вр}$$

Здесь \bar{u}_B – вектор напряжений ветвей

\bar{i}_B – вектор токов ветвей

$[R_B]$ – матрица активных сопротивлений ветвей

$$[R_B] = \begin{bmatrix} R_{B1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{B2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_{BQ} \end{bmatrix}$$

Вектор

трансформаторных ЭДС

$$\bar{e}_{тр} = -[L] \frac{d\bar{i}_B}{dt}$$

Вектор ЭДС вращения

$$\bar{e}_{вр} = -\Omega \left[\frac{dL}{d\alpha} \right] \bar{i}_B$$

Таким образом, уравнение напряжений ЭМ

$$\bar{u}_B = [R_B] \bar{i}_B + [L] \frac{d\bar{i}_B}{dt} + \Omega \left[\frac{dL}{d\alpha} \right] \bar{i}_B$$

– система Q

дифференциальных уравнений

Уравнения аналогичны общей теории ЭМ,

но здесь учтена дискретность обмоток,

двусторонняя зубчатость и перемещение сердечников:

$$[L] = [C] \cdot [\Lambda^\Psi] \cdot [F]$$

Решение системы диф.уравнений (при $\Omega = \text{Const}$

и известных $u = U_m \sin(\omega t)$ или $u = U_f$ или $u = 0$)

→ значения токов $i_B(t)$

При $\Omega \neq \text{Const}$ надо добавить уравнение движения

$$M - M_c = J \frac{d\Omega}{dt}$$

Для нахождения электромагнитного момента M рассмотрим преобразование энергии

Энергия магнитного поля

Прежде чем браться за электромеханическое преобразование энергии, научимся считать энергию, запасенную в магнитном поле ЭМ

В случае полевого расчета (магнитное поле, созданное токами обмоток)

- проводим расчет магнитного поля во всем объеме ЭМ для заданных мгновенных значений токов (i_b) и положения сердечников (α)
- находим распределение индукции и напряженности поля $B = f(x, y, z)$ и $H = f(x, y, z)$
- находим распределение плотности энергии магнитного поля $w_\mu = \frac{BH}{2} = f(x, y, z)$
- находим энергию магнитного поля в элементарных объемах dV (конечных элементах) $dW = w_\mu dV$
- интегрируем по всему объему ЭМ для получения полной энергии магнитного поля $W = \int_V w_\mu dV$

(алгоритм обычно встроен в постпроцессор программ полевых расчетов)

Энергия магнитного поля

Поскольку намагничивание осуществляется токами обмоток, можно выразить энергию магнитного поля через токи

Найдем энергию, запасенную в магнитном поле ЭМ при заданных мгновенных значениях токов обмоток i_0 и заданном положении сердечников α (определяет индуктивности обмоток)

Для этого найдем энергию, поступающую в ЭМ за время виртуального намагничивания токами, изменяющимися от 0 до i_0 за время t_0

Если предположить, что за время этого виртуального намагничивания сердечники не перемещаются (механическая работа отсутствует) и обмотки не нагреваются (потери энергии отсутствуют), то вся поступившая в ЭМ энергия пойдет на создание магнитного поля

Энергию, поступающую в обмотки от источников, посчитать просто

Энергия магнитного поля

Пусть токи ветвей за время виртуального намагничивания t_0 изменяются линейно от 0 до заданных значений i_0

Ток i -й ветви
$$i_i(t) = \frac{t}{t_0} i_{i0}$$

Потокосцепление i -й ветви
$$\Psi_i(t) = \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_j = \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{t}{t_0} i_{j0} = \frac{t}{t_0} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{j0} = \frac{t}{t_0} \Psi_{i0}$$

где Ψ_{i0} – потокосцепление i -й ветви при заданных токах обмоток i_0 и положении сердечников α .
Т.е. потокосцепления ветвей тоже изменяются линейно в процессе виртуального намагничивания

Баланс напряжений i -й ветви (по закону Кирхгофа)
$$u_i(t) = R_i i_i(t) - e_i(t)$$

Пренебрегая падением напряжения на $R_i \approx 0$

$$u_i(t) = -e_i(t) = \frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{1}{t_0} \Psi_{i0} = \frac{1}{t_0} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{j0}$$

Т.е. напряжения ветвей остаются постоянными

Энергия магнитного поля

Полная энергия, поступающая в ветвь i за время dt

$$dw_i = p_i dt = u_i i_i dt = \frac{t}{t_0} i_{i0} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{j0} dt$$

За все время виртуального намагничивания t_0 в ветвь i поступит энергия

$$W_i = \int_{t=0}^{t_0} dw = \frac{1}{t_0} i_{i0} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{j0} \int_{t=0}^{t_0} t dt = \frac{1}{2} i_{i0} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{j0}$$

Полная энергия, поступающая во все ветви ЭМ за время виртуального намагничивания

$$W = \sum_{i=1}^{\varrho} W_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_{i0} \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_{j0}$$

Эта энергия и идет на создание магнитного поля (запасается в магнитном поле неподвижной машины в процессе виртуального намагничивания при изменении токов от 0 до i_0)

Таким образом, энергия магнитного поля ЭМ при заданных токах ветвей и положении сердечников α (известных индуктивностях)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_j$$

Энергия магнитного поля

В процессе работы машины токи и индуктивности изменяются периодически:

$$i = I_m \cos(\omega t), L = L(\alpha), \alpha = \Omega t$$

→ периодически изменяется энергия, запасенная в магнитном поле $W|_{t+T} = W|_t$

Тогда расход энергии,

идущий на изменение энергии магнитного поля в течение периода $W_T = \int_t^{t+T} dW = W|_{t+T} - W|_t = 0$

И соответствующая мощность $p_W = W_T / T = 0$

Тем не менее, в машине переменного тока

- в течение части периода энергия магнитного поля возрастает (намагничивание, $dW > 0$) и мощность, расходуемая на изменение энергии магнитного поля положительна (энергия поступает из сети в обмотки и запасается в магнитном поле) $p_W = \frac{dW}{dt} > 0$
- на другой части периода энергия магнитного поля возвращается в сеть (размагничивание / перемагничивание, $dW < 0$) и мощность $p_W = \frac{dW}{dt} < 0$
- при этом в среднем за период мощность $p_W = 0$

Разным машинам требуется разное изменение энергии магнитного поля

Мера интенсивности обмена энергией между фазой ЭМ и сетью

при перемагничивании на каждом периоде – реактивная мощность

$$Q = \left| \frac{dW}{dt} \right|_{\max}$$

Энергия магнитного поля

Пример:

- Для электрической машины с 3-фазной двухслойной обмоткой на 1 сердечнике ($m_1 = 3$, $2p = 2$, $q_1 = 2$, $y = 5$, $w_k = 3$) определить энергию, запасенную в магнитном поле машины, при токах ветвей $i_{B1} = 4$ А, $i_{B2} = -2$ А, $i_{B3} = -2$ А
- При гладком сердечнике 2 индуктивности не зависят от α и равны
 - $L_{11} = L_{22} = L_{33} = 4,61 \cdot 10^{-4}$ Гн
 - $L_{12} = L_{13} = L_{23} = L_{21} = L_{31} = L_{32} = -1,96 \cdot 10^{-4}$ Гн

Воспользуемся формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q i_i \sum_{j=1}^q L_{ij} i_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i_i \sum_{j=1}^3 L_{ij} i_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i_{Bi} \cdot (L_{i1} i_{B1} + L_{i2} i_{B2} + L_{i3} i_{B3})$$

$$= 1/2 \cdot i_{B1} (L_{11} i_{B1} + L_{12} i_{B2} + L_{13} i_{B3})$$

$$+ 1/2 \cdot i_{B2} (L_{21} i_{B1} + L_{22} i_{B2} + L_{23} i_{B3})$$

$$+ 1/2 \cdot i_{B3} (L_{31} i_{B1} + L_{32} i_{B2} + L_{33} i_{B3})$$

$$= 1/2 \cdot (i_{B1}^2 L_{11} + i_{B2}^2 L_{22} + i_{B3}^2 L_{33}) + i_{B1} i_{B2} L_{12} + i_{B1} i_{B3} L_{13} + i_{B2} i_{B3} L_{23} = 0,007884 \text{ Дж}$$

Электромеханическое преобразование энергии

Рассмотрим преобразование энергии в электрическом *двигателе* исходя из закона сохранения энергии (баланса мощностей)

Мгновенная полная мощность, поступающая в ветви ЭМ из сети расходуется на:

$$\sum_{i=1}^q p_i$$

- потери мощности при преобразовании энергии $P_{эл}$
- мощность, идущую на изменение энергии магнитного поля вследствие изменения токов и индуктивностей $P_W = \frac{dW}{dt}$
- создание механической мощности, передаваемой через вал в нагрузку $P_{мех}$

Уравнение баланса мощностей
$$\sum_{i=1}^q p_i = P_{эл} + P_W + P_{мех}$$

Электромеханическое преобразование энергии

Мгновенная полная мощность, поступающая в ветвь i из сети

$$p_i = u_i i_i = (R_i i_i - e_{\text{тр}} - e_{\text{вр}}) i_i = R_i i_i^2 + i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_j}{dt} + i_i \Omega \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$$

Полная мощность, поступающая во все ветви ЭМ

$$\sum_{i=1}^{\varrho} p_i = \sum_{i=1}^{\varrho} R_i i_i^2 + \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_j}{dt} + \Omega \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$$

Потери мощности при преобразовании энергии

$$p_{\text{эл}} = \sum_{i=1}^{\varrho} R_i i_i^2$$

Мощность, идущая на изменение энергии магнитного поля

$$p_w = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_j \right)$$

(производная сложной функции, т.к. меняются токи и индуктивности)

Электромеханическое преобразование энергии

Найдем приращение энергии магнитного поля dW за время dt , в течение которого токи i_i , i_j и индуктивности L_{ij} получают приращения di_i , di_j , dL_{ij}

$$\begin{aligned}dW &= \frac{\partial W}{\partial i_i} di_i + \frac{\partial W}{\partial i_j} di_j + \frac{\partial W}{\partial L_{ij}} dL_{ij} \\&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} 1 \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} i_j \cdot di_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \cdot 1 \cdot di_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} 1 \cdot i_j \cdot dL_{ij} \\&= \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \cdot di_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \cdot dL_{ij}\end{aligned}$$

Тогда мощность, идущая на изменение энергии магнитного поля

$$p_W = \frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_j}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{dt} = \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_j}{dt} + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$$

Вся оставшаяся мощность, поступившая из сети, преобразуется в механическую мощность

Электромеханическое преобразование энергии

Итак, механическая мощность может быть найдена как

$$\begin{aligned} P_{\text{мех}} &= \sum_{i=1}^{\varrho} P_i - P_{\text{эл}} - P_W \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\varrho} R_i i_i^2 + \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_j}{dt} + \Omega \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^{\varrho} R_i i_i^2 \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} L_{ij} \frac{di_j}{dt} + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha} \right) \end{aligned}$$

Заметим, что
$$P_{\text{мех}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \Omega \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i e_{\text{впр}i}$$

Т.е. механическая мощность

$$P_{\text{мех}} = \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$$

- Преобразование энергии ($p_{\text{мех}} \neq 0$) определяется только величиной ЭДС вращения
- Трансформаторная ЭДС не участвует в электромеханическом преобразовании энергии

Электромагнитный момент

Механическая мощность (во вращающейся машине) $p_{\text{мех}} = M\Omega$

Тогда электромагнитный момент $M = \frac{p_{\text{мех}}}{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$

Обратим внимание: $M = \frac{\partial W}{\partial \alpha}$ – частная производная энергии магнитного поля по углу α при фиксированных токах обмоток

Найденное значение M – мгновенное значение

- Если $M > 0$, момент направлен в сторону вращения (возрастания α) – вращающий момент
 - электрическая энергия преобразуется в механическую
- Если $M < 0$, момент направлен против вращения – тормозной момент
 - механическая энергия преобразуется в электрическую

Так как токи и L изменяются периодически, то и момент изменяется периодически

- Если за период $M_{\text{ср}} > 0 \rightarrow$ двигательный режим работы
 - Если за период $M_{\text{ср}} < 0 \rightarrow$ генераторный режим работы
- Относительно $M_{\text{ср}}$ возможны гармоники (пульсации) момента

Электромагнитный момент

Необходимое условие осуществления электромеханического преобразования энергии ($M \neq 0$)

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\varrho} i_i \sum_{j=1}^{\varrho} i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$$

Для получения $M \neq 0$ (и $p_{\text{мех}} \neq 0$) необходимо, чтобы хоть одна производная индуктивности L_{ij} по углу поворота α была отлична от нуля

$$\frac{dL_{ij}}{d\alpha} \neq 0$$

В ЭМ это достигается периодическим изменением $L = f(\alpha)$
(конструкции обмоток и магнитопровода)