

Методы анализа электрических машин

Практическое использование
Метода зубцовых контуров

МА-04

2023

Практическое использование Метода зубцовых контуров

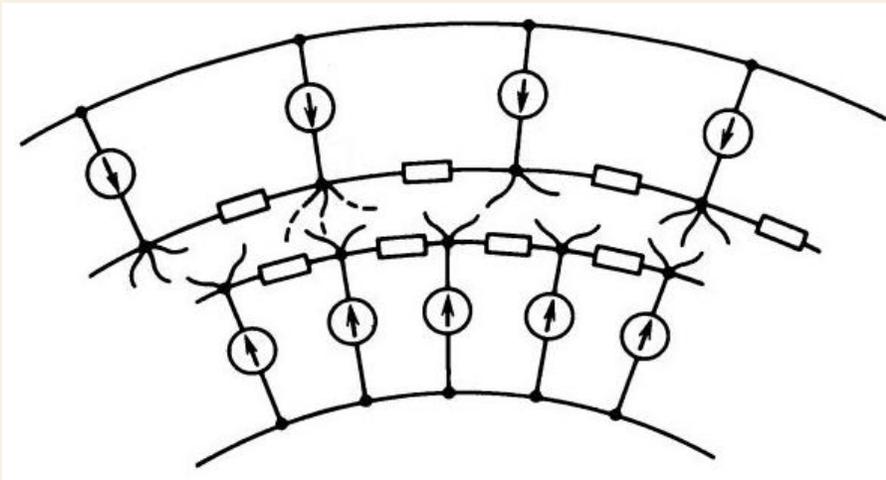


- Учет насыщения элементов сердечников
- Простой учет источников МДС в схеме замещения
- Электромагнитный момент в насыщенной машине
- Способы расчета нелинейных цепей
- Универсальный метод расчета полей и процессов в электрических машинах

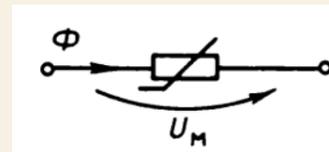
Учет насыщения элементов сердечников

Теоретические основы МЗК – анализ ненасыщенной ЭМ ($\mu_{ст} = \infty$):
энергия магнитного поля сконцентрирована в зазоре, где среда линейна

Схема замещения по МЗК обеспечивает правильное распределение потоков в зазоре между зубцами статора и ротора



Распределение потоков в магнитопроводе тоже правильное,
а падение МДС в элементах легко смоделировать
нелинейными сосредоточенными проводимостями



$$\Phi = f(U_\mu)$$

Учет насыщения элементов сердечников

Элементы сердечника:

- зубцы / участки зубцов – в основном радиальный поток
- участки ярма на зубцовом делении – тангенциальный поток

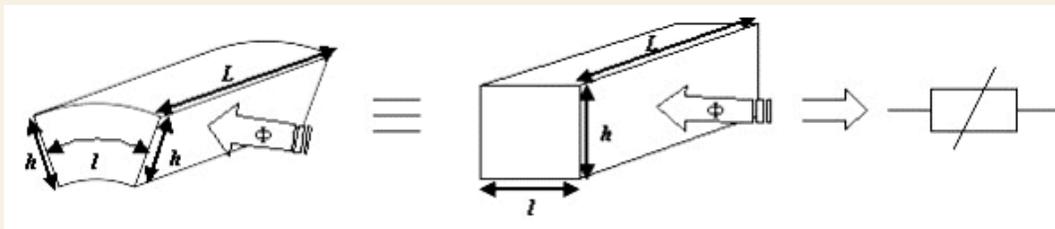
Характеристика намагничивания элемента магнитной цепи $\Phi = U_\mu \Lambda_\mu$

В случае равномерного поля ($B = B_{\text{ср}}, H = H_{\text{ср}}$)

Магнитный поток $\Phi = \int_{S_n} B dS_n = B_{\text{ср}} S_n$ Падение магнитного напряжения $U_\mu = \int H dl = H_{\text{ср}} l$

По известной кривой намагничивания стали $B = f(H)$
получаем характеристику намагничивания:

$$B = \mu_r \mu_0 H \rightarrow BS_n = \mu_r \mu_0 Hl \rightarrow \Phi = \mu_r \mu_0 U_\mu$$

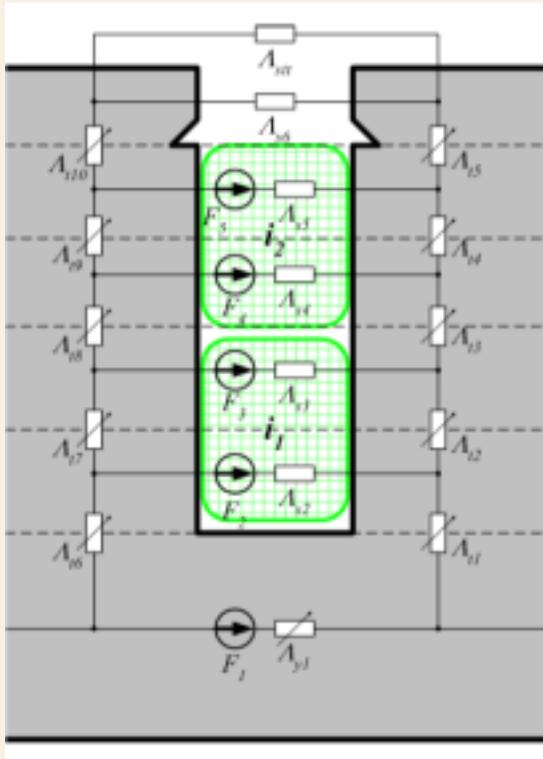


Упрощение формы элемента не влияет на интегральные величины (потокосцепление обмотки)

Для более точного учета распределения потоков в магнитопроводе можно использовать несколько слоев схемы замещения в зубцовой зоне и в ярме

Учет насыщения элементов сердечников

Пример неравномерного поля – трапецеидальный зубец между прямоугольными пазами (переменное сечение → изменение индукции по высоте зубца)



Уточнение модели – разбиение зубца на несколько слоев по высоте

Каждый элемент упрощается до прямоугольника,

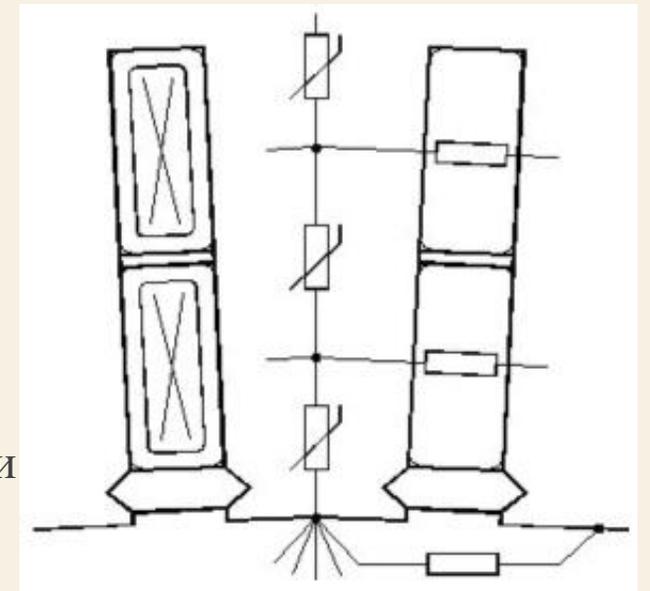
но зубец в целом моделируется точнее

Больше слоев → выше точность модели

Одновременно детализируется поле пазового рассеяния (то же число слоев)

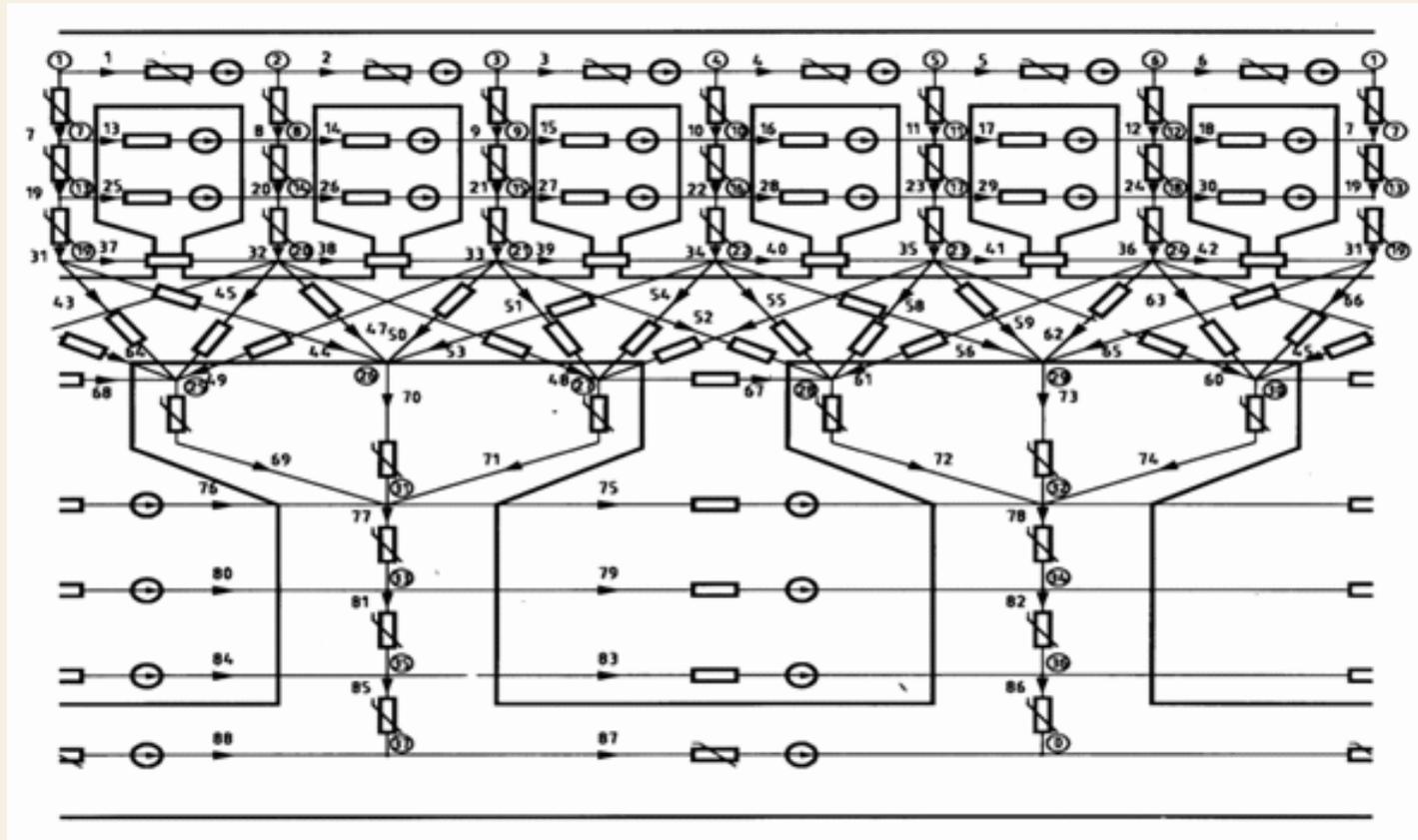
Практическая рекомендация:

- 1 слой в кончиках зубцов
- плюс 1 слой на каждый слой обмотки



Учет насыщения элементов сердечников

Пример – синхронная явнополюсная машина с двухслойной обмоткой статора



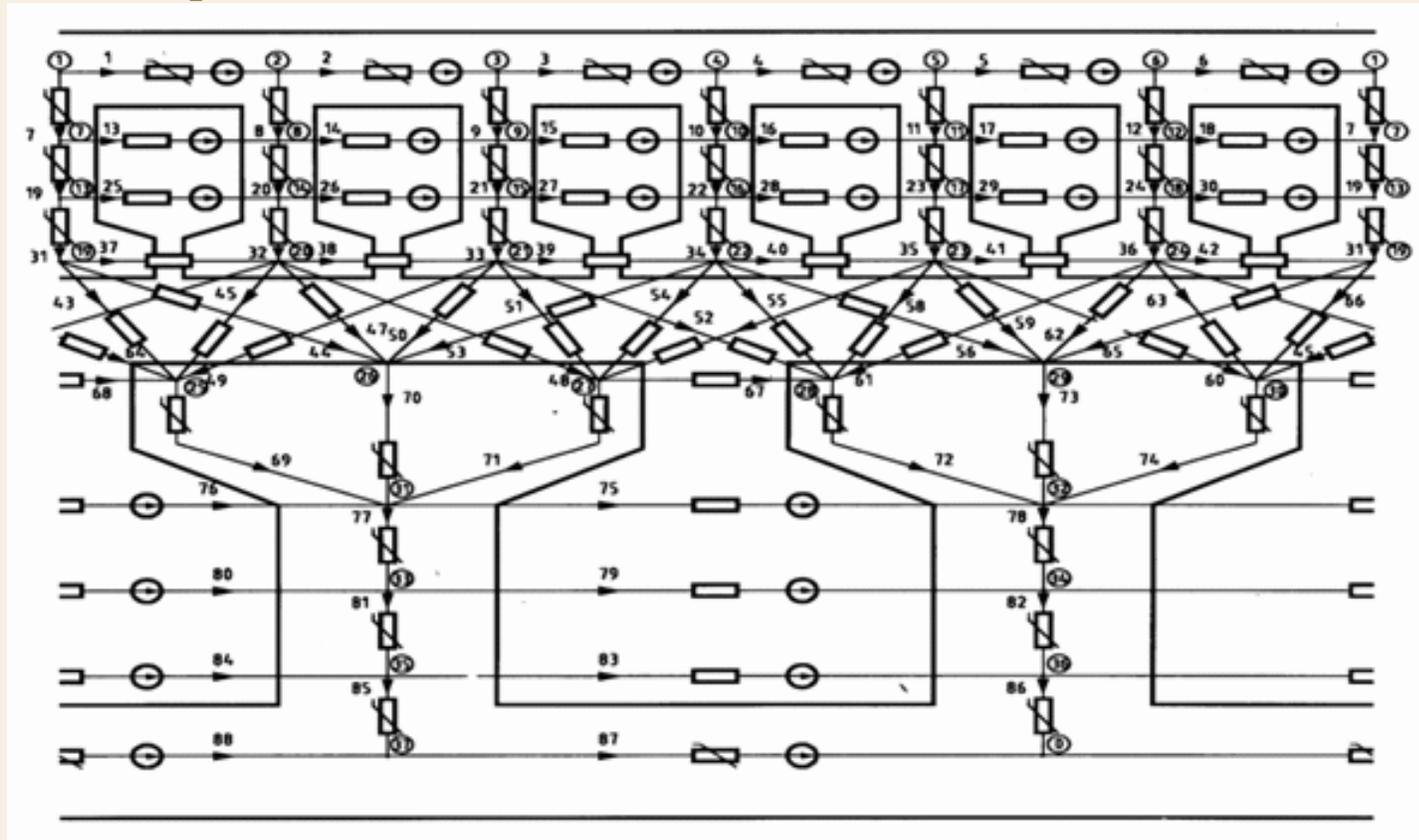
Ярмо: 1 слой схемы замещения
Зубцовая зона: 3 слоя

Полюсный наконечник: зубцовые контуры реальной ДО или фиктивной с нулевыми пазами

Полус: 2-3 слоя для учета межполюсного рассеяния

Простой учет источников МДС в схеме замещения

Удобно размещать источники МДС в тангенциальных ветвях



- такую схему можно получить переносом источника через узел (из радиальных ветвей с МДС зубцовых контуров)
- либо сразу использовать другой способ представления токов в схеме замещения

Простой учет источников МДС в схеме замещения

Схема замещения заменяет пространственное распределение скалярного магнитного потенциала отдельными узлами

Для учета влияния токов используется Метод магнитных зарядов

Катушку с током окружает магнитный листок произвольной формы с распределенными магнитными зарядами

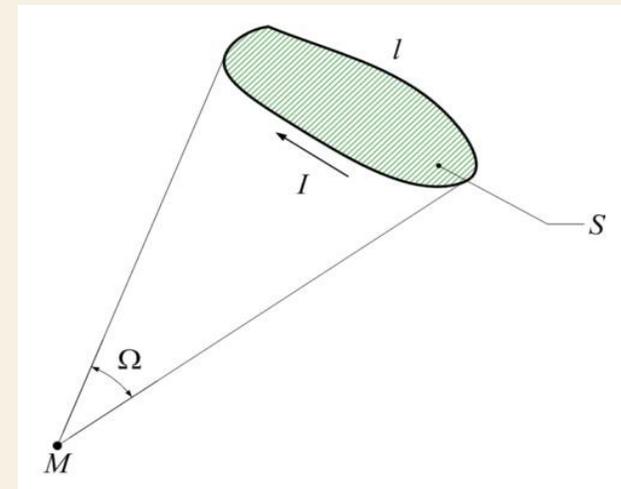
Плотность зарядов определяется током катушки

Магнитный листок «натянут» на катушку: окружает проводники

→ исключает катушку с током из расчетной области

(при этом невозможно рассчитать поле внутри катушки)

За пределами катушки – бесконечно тонкий двусторонний листок



На линии, пересекающей магнитный листок, происходит скачок нормальной составляющей напряженности магнитного поля на величину

$$H_n = \frac{2\sigma}{\mu_0}$$

Результирующее магнитное поле остается потенциальным, но изменяется под действием магнитных зарядов

(учет влияния токов, отсутствующих в расчете)

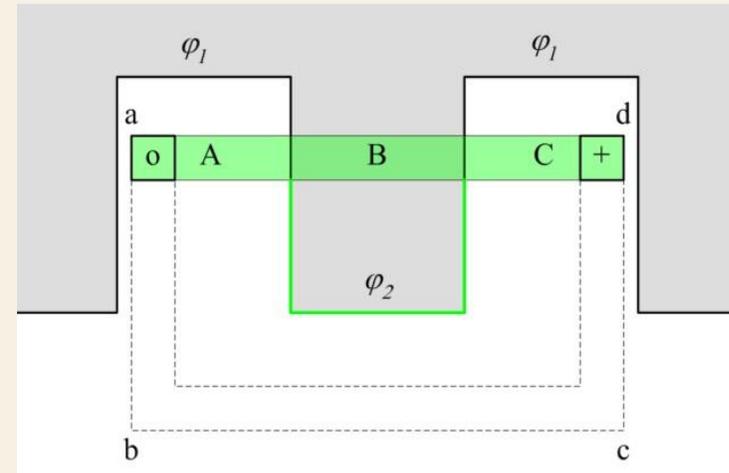
Простой учет источников МДС в схеме замещения

В ненасыщенных ЭМ ($\mu_{ст} = \infty$) силовые линии всегда перпендикулярны стальным поверхностям ($H_{\tau} = 0$) и скалярный потенциал поверхности $\varphi = \text{Const}$

Когда магнитный листок пересекает сердечник (А-В-С) он создает скачок скалярного магнитного потенциала на величину полного тока катушки $\varphi_2 - \varphi_1 = Iw_k$

При насыщении сердечника (снижении $\mu_{ст}$) линии поля сохраняют перпендикулярность стальным поверхностям (вплоть до $\mu_{ст} = 10$) \rightarrow сохраняется правило $\varphi_2 - \varphi_1 = Iw_k$

При другой форме магнитного листка (a-b-c-d) его влияние учитывается более сложными граничными условиями в зазоре (там сложнее форма силовых линий)



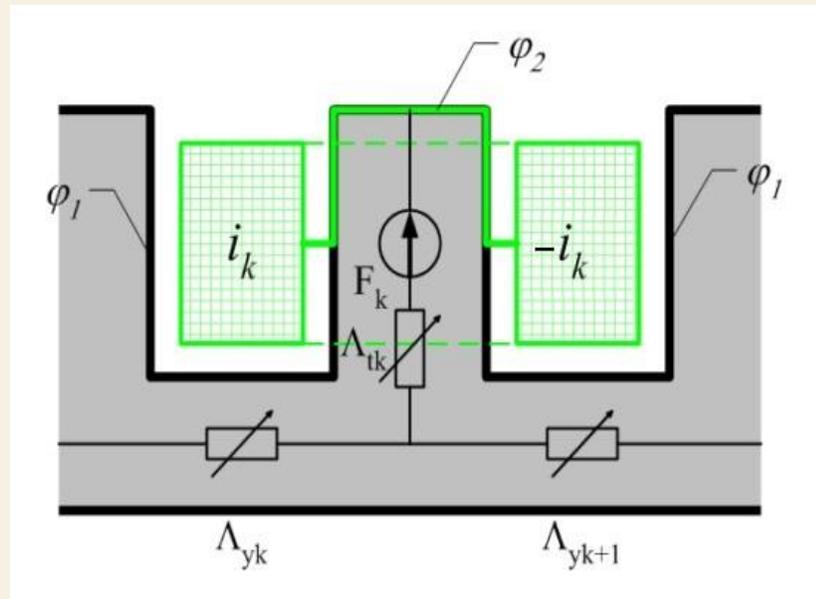
Простой учет источников МДС в схеме замещения

Создавая схему замещения магнитной цепи каждый зубец и элемент ярма заменяют ветвью с сосредоточенной проводимостью (линейной или нет)

Чтобы убрать токи катушек (ЗК) – используем магнитные листки

Магнитный листок при пересечении зубца создает

скачок потенциала $\varphi_2 - \varphi_1 = i_k$



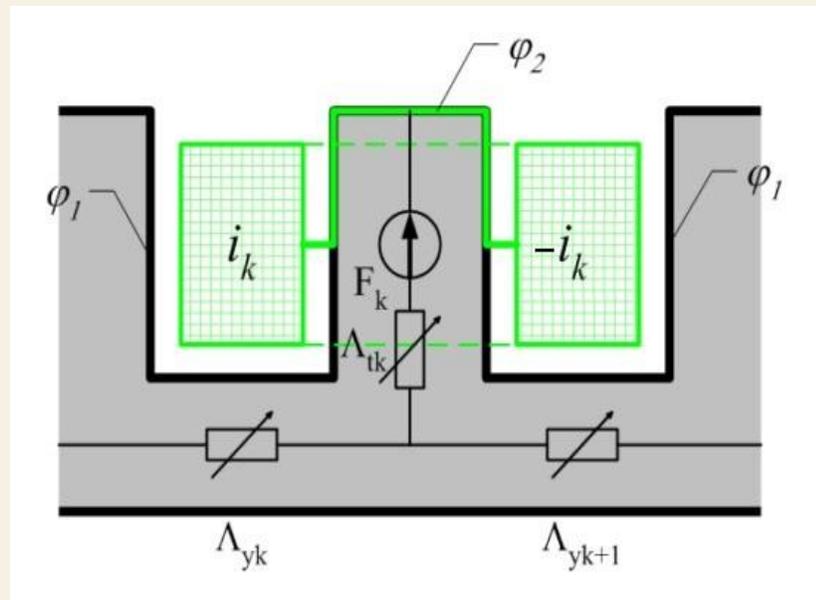
В схеме замещения это эквивалентно добавлению источника МДС в ветвь зубца $F_k = i_k$

В общем случае:
если магнитный листок тока i
пересекает ветвь схемы замещения,
в этой ветви появляется источник МДС,
равный току $F = i$

Простой учет источников МДС в схеме замещения

Магнитный листок тока зубцового контура может иметь любую форму и может пересекать не зубец, но ярмо

Тогда источники МДС должны быть включены в левую и правую ветви ярма относительно ЗК k



Поскольку в каждом пазу расположены катушечные стороны двух зубцовых контуров, каждая ветвь ярма k получит по 2 источника МДС от двух соседних ЗК в пазу k

$$F_{yk} = i_k + (-i_{k-1}) = i_{пк}$$

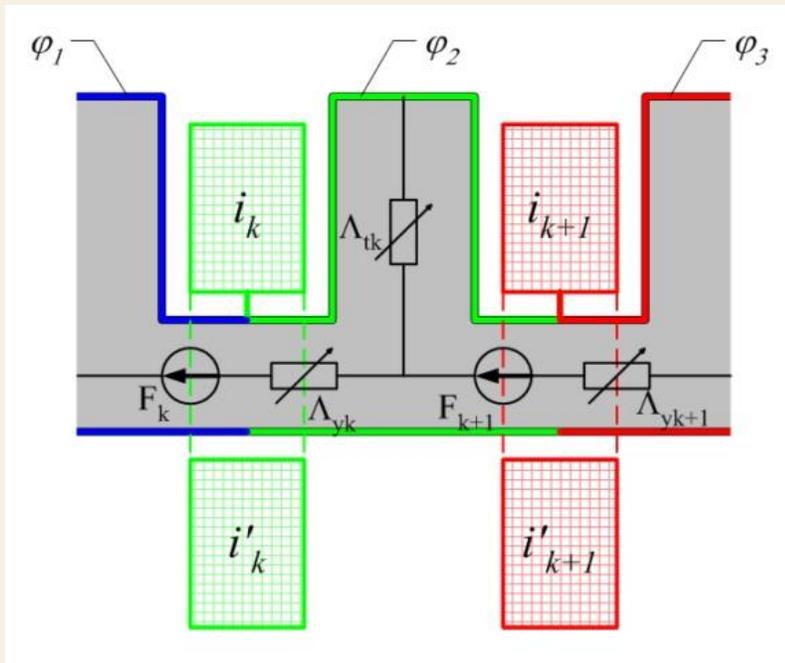
(а полная МДС в этой ветви будет равна току паза)

Простой учет источников МДС в схеме замещения

Это соответствует модели, в которой многофазная обмотка заменяется токами пазов i_k , каждый из которых замыкается вокруг участка ярма, создавая фиктивный ток

$$i'_k = -i_k \quad (\text{«граммовская» обмотка})$$

Магнитный листок этой пары токов $i_k \rightarrow i'_k$ пересекает участок ярма и добавляет в него источник МДС F_k



Магнитное поле внутри ЭМ создается теми же токами пазов \rightarrow оно не меняется

Но за пределами ЭМ появляется фиктивное поле, которое не участвует в работе ЭМ и должно игнорироваться

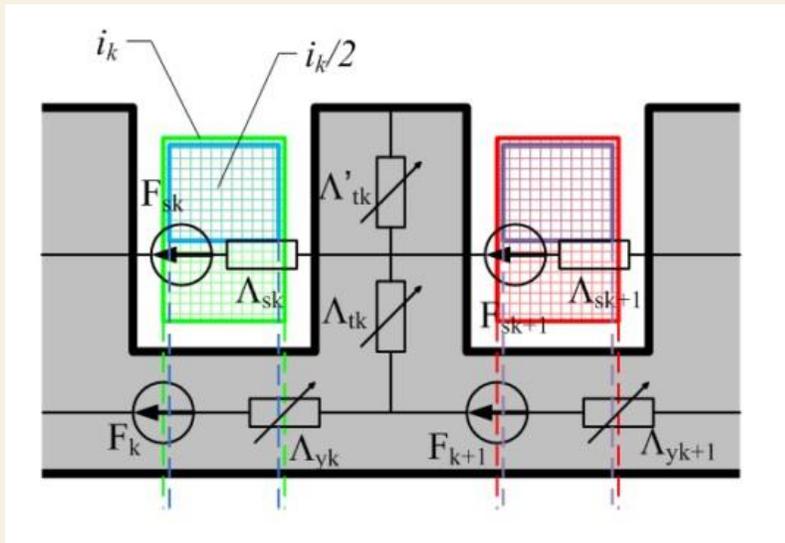
Такое размещение источников МДС в тангенциальных ветвях проще реализовать, т.к. для них не надо рассчитывать токи ЗК (используются токи пазов $\vec{i}_n = [G]\vec{i}_b$)

Простой учет источников МДС в схеме замещения

Такой метод применим и в многослойной схеме замещения

Частый вариант – схема замещения с 2 слоями в зубце:

- зубец разделен на 2 слоя Λ_{tk} и Λ'_{tk}
- дополнительная тангенциальная ветвь содержит проводимость рассеяния половины паза (по высоте) Λ_{sk}



Ветвь ярма yk сцеплена с полным током паза, ее МДС $F_k = i_k$

Ветвь паза sk сцеплена с $1/2$ тока паза, ее МДС $F_{sk} = i_k / 2$

Аналогично – на каждом зубцовом делении k

Токи пазов находят с помощью матрицы структуры обмотки G
→ МДС k тангенциальной ветви определяется числом витков каждой фазы, сцепленным с этой ветвью

Простой учет источников МДС в схеме замещения

На практике удобно использовать матрицу сцепленных витков фаз $[W]$

- число строк $[W]$ = число ветвей схемы замещения магнитной цепи
- число столбцов $[W]$ = число ветвей электрической цепи
- элемент w_{ij} = число витков j -той электрической ветви, сцепленной с i -той ветвью схемы замещения

$[W]$ связывает ветви схемы замещения с фазами обмотки

Вектор источников МДС в ветвях схемы замещения находят через вектор токов электрических ветвей как $\bar{F} = [W] \bar{i}_b$

Одновременно $[W]$ связывает потокосцепления электрических ветвей с потоками в ветвях схемы замещения $\bar{\Psi}_b = [W]^T \bar{\Phi}$

(потокосцепление j -й эл.ветви равно сумме потокосцеплений ветвей схемы замещения, сцепленных с этой эл.ветвью) $\Psi_{bj} = \sum_{i=1}^n \psi_{ij} = \sum_{i=1}^n w_{ij} \Phi_i$

Электромагнитный момент в насыщенной машине

В ненасыщенной машине (где можно использовать индуктивности $L = \Psi / i$) момент находили как сумму взаимодействий токов ветвей

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Q i_i \sum_{j=1}^Q i_j \frac{dL_{ij}}{d\alpha}$$

или в матричном виде $M = \frac{1}{2} \bar{i}_b^T \left[\frac{dL}{d\alpha} \right] \bar{i}_b$

Также момент равен частной производной энергии магнитного поля по углу поворота

$$M = \frac{dW}{d\alpha} \quad \text{где} \quad W = \frac{1}{2} \bar{i}_b^T [L] \bar{i}_b$$

$[L]$ – матрица индуктивностей электрических ветвей ($Q \times Q$)

$[A]$ – матрица проводимостей взаимоиндукции ЗК ($Z \times Z$)

Заметим, что индуктивности находят как $[L] = [F]^T [A] [F]$

Тогда энергия магнитного поля $W = \frac{1}{2} \bar{i}_b^T [F]^T [A] [F] \bar{i}_b = \frac{1}{2} ([F] \bar{i}_b)^T [A] ([F] \bar{i}_b)$

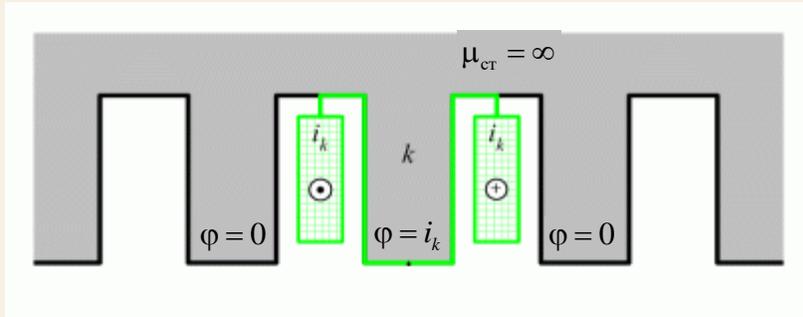
может быть выражена через токи зубцовых контуров и проводимости взаимоиндукции зубцовых контуров (проводимости ветвей, расположенных в зазоре ЭМ)

$$W = \frac{1}{2} \bar{i}_{3K}^T [A] \bar{i}_{3K}$$

Где взять токи ЗК?

Электромагнитный момент в насыщенной машине

В ненасыщенной ЭМ ($\mu_{ст} = \infty$) энергия магнитного поля сосредоточена в зазоре
 Скалярные магнитные потенциалы зубцов равны токам зубцовых контуров



Энергия магнитного поля
 может быть найдена
 через потенциалы зубцов

$$W = \frac{1}{2} \bar{\Phi}_Z^T [\Lambda] \bar{\Phi}_Z$$

Тогда электромагнитный момент

$$M = \frac{1}{2} \bar{\Phi}_Z^T \left[\frac{d\Lambda}{d\alpha} \right] \bar{\Phi}_Z$$

В насыщенной ЭМ энергия магнитного поля – и в зазоре и в сердечнике

Но при вращении поля и повороте ротора энергия магнитного поля в сердечнике не изменяется

$$\frac{dW_{ст}}{d\alpha} = 0$$

Момент также определяется производной энергии магнитного поля в зазоре

$$M = \frac{1}{2} \bar{\Phi}_Z^T \left[\frac{d\Lambda}{d\alpha} \right] \bar{\Phi}_Z$$

Здесь Φ_Z – потенциалы зубцов (по итогам расчета схемы замещения, $Z = z_1 + z_2$)

$\left[\frac{d\Lambda}{d\alpha} \right]$ – матрица производных проводимостей взаимоиндукции ЗК

(на предварительном этапе МЗК надо считать не только $\Lambda_{sr}(\alpha_{sr})$, но и $\Lambda'_{sr}(\alpha_{sr}) = \frac{d\Lambda}{d\alpha}$)

Способы расчета нелинейных цепей

В нелинейной цепи невозможно рассчитать $\bar{\Psi}_B = [C][\Lambda^\Psi][F]\bar{i}_B = [L]\bar{i}_B$

т.к. проводимости ветвей зависят от потоков в них

(→ индуктивности теряют однозначность)

Необходим численный расчет схемы замещения магнитной цепи (итерационный метод)

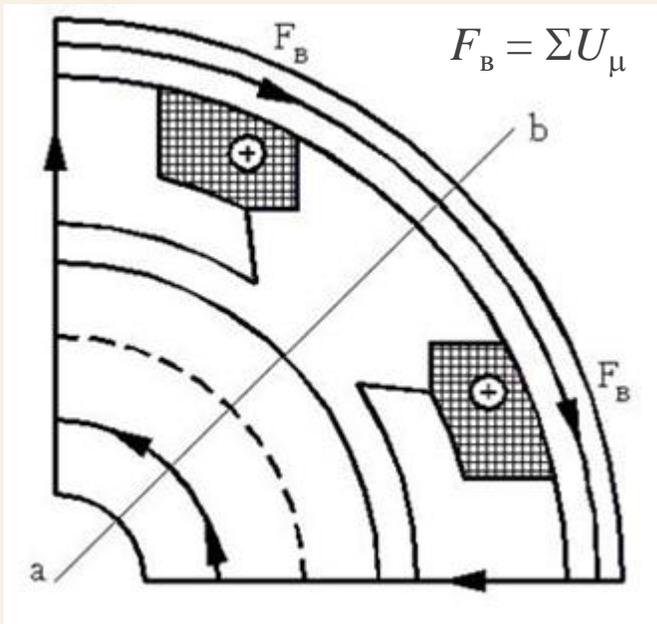
Методы расчета цепей (магнитных и электрических)

- Метод контурных токов
 - неприменим, т.к. схема замещения непланарна в зазоре
- Метод узловых потенциалов
 - один узел принимают за «нулевой» (потенциал $\varphi_0 = 0$, его номер равен 0)
 - потенциалы остальных узлов рассчитывают относительно $\varphi_0 = 0$
(частное решение)
 - проводимость ветви $\Lambda = \Phi/U_\mu$, где $\Phi = f(U_\mu)$ и $U_\mu = \varphi_f - \varphi_t$
(т.е. $\Lambda = \text{tg}$ угла наклона касательной к кривой намагничивания ветви в рабочей точке – переменная проводимость)

Способы расчета нелинейных цепей

Способ математического описания цепи – матрица инцидентий $A(n, b)$

- n – число узлов (кроме нулевого)
- b – число ветвей
- $a_{ij} = +1$, если ветвь j соединена с узлом i и направлена от него
- $a_{ij} = -1$, если ветвь j соединена с узлом i и направлена к нему
- $a_{ij} = 0$, если ветвь j не соединена с узлом i

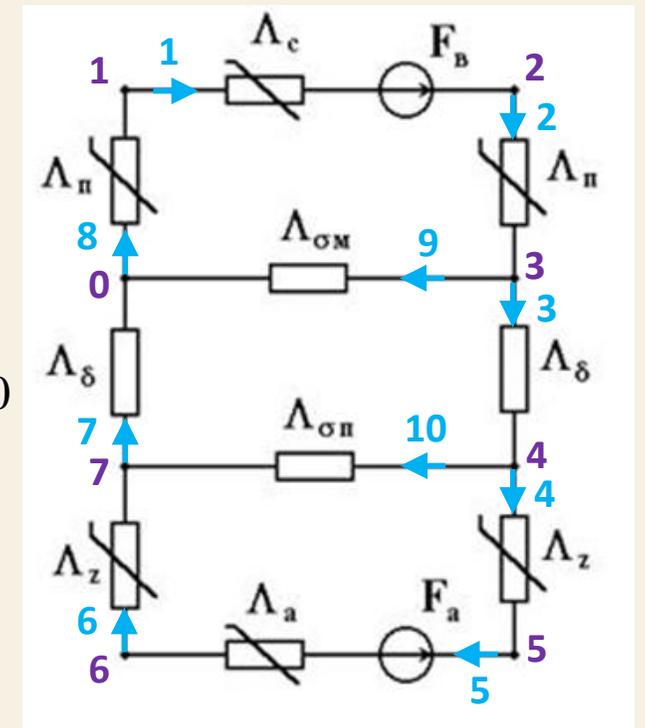


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	+1							-1			Φ_1
2	-1	+1									Φ_2
3		-1	+1							+1	Φ_3
4			-1	+1						+1	Φ_4
5				-1	+1						Φ_5
6					-1	+1					Φ_6
7						-1	+1			-1	Φ_7
0								1	+1	1	Φ_8
											Φ_9
											Φ_{10}

полная × = 0 редуцированная

Рассмотрим пример
схемы замещения

- узлы
- ветви
- матрица инцидентий



Способы расчета нелинейных цепей

Первый закон Кирхгофа для *электрической* цепи

$$[A]\bar{i} = 0$$

Каждая строка матричного уравнения

→ сумма токов в узле

$$\sum_{j=1}^b a_{ij} i_j = 0$$

Решение – правильные токи (потоки)

Метод узловых потенциалов – запись уравнения относительно потенциалов узлов

Решение – потенциалы узлов

по ним – u (или U_{μ}), по ним – токи (потоки)

Матрица инциденций описывает топологию схемы (ветви / узлы)

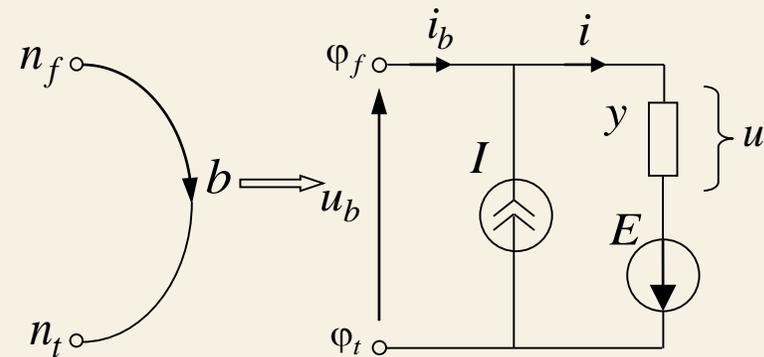
Нужно еще знать содержимое ветвей

Обобщенная ветвь:

ветвь b , направленная от n_f (from) к n_t (to)

может содержать:

- сосредоточенный элемент с проводимостью y
- источник ЭДС E
- источник тока I



Характеристики обобщенной ветви

- ток через элемент проводимости: i
- напряжение на элементе: $u = i / y$
- ток обобщенной ветви: $i_b = i - I$
- напряжение обобщенной ветви: $u_b = u - E$
- при этом $u_b = \phi_f - \phi_t$

Способы расчета нелинейных цепей

Перепишем первый закон Кирхгофа

$$[A]\bar{i}_b = 0 \rightarrow [A]\bar{i} - [A]\bar{I} = 0$$

- на каждом элементе проводимости $i = y \cdot u$
- в каждой ветви $u = u_b + E$

В матричном виде $\bar{i} = [Y_b]\bar{u} \quad \bar{u} = \bar{u}_b + \bar{E}$

где $[Y_b]$ – диагональная матрица проводимостей ветвей

Первый закон Кирхгофа $[A][Y_b]\bar{u} - [A]\bar{I} = 0$

$$\rightarrow [A][Y_b](\bar{u}_b + \bar{E}) = [A]\bar{I} \rightarrow [A][Y_b]\bar{u}_b = [A]\bar{I} - [A][Y_b]\bar{E}$$

Напряжения ветвей выразим

через разность потенциалов узлов

$$\bar{u}_b = [A]^T \bar{\varphi}_n$$

тогда уравнение

$$\text{запишется в виде} \quad [A][Y_b][A]^T \bar{\varphi}_n = [A](\bar{I} - [Y_b]\bar{E})$$

уравнение относительно потенциалов узлов

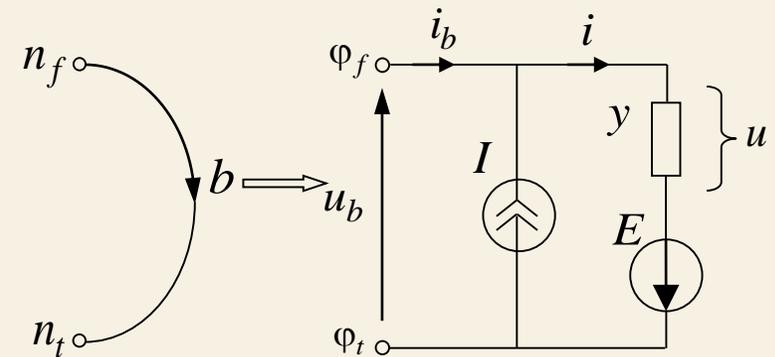
– «узловое уравнение»

Обобщенная ветвь:

ветвь b , направленная от n_f (from) к n_t (to)

может содержать:

- сосредоточенный элемент с проводимостью y
- источник ЭДС E
- источник тока I



Характеристики обобщенной ветви

- ток через элемент проводимости: i
- напряжение на элементе: $u = i / y$
- ток обобщенной ветви: $i_b = i - I$
- напряжение обобщенной ветви: $u_b = u - E$
- при этом $u_b = \varphi_f - \varphi_t$

Способы расчета нелинейных цепей

Узловое уравнение $[A][Y_b][A]^T \bar{\Phi}_n = [A](\bar{I} - [Y_b]\bar{E})$

записывают в виде $[Y_n]\bar{\Phi}_n = \bar{I}_n$

где $[Y_n] = [A][Y_b][A]^T$ – матрица узловых проводимостей

$\bar{I}_n = [A](\bar{I} - [Y_b]\bar{E})$ – вектор эквивалентных узловых источников

Узловое уравнение решается относительно узловых потенциалов («узловой анализ») прямым или итерационным методом

Схема замещения магнитной цепи описывается тем же узловым уравнением с помощью прямой аналогии:

- электрический ток → магнитный поток
- напряжение → падение магнитного напряжения
- электрический потенциал → скалярный магнитный потенциал
- источник ЭДС/тока → источник МДС/потока

Способы расчета нелинейных цепей

Узловое уравнение $[Y_n]\bar{\varphi}_n = \bar{I}_n$
 можно формировать без матрицы инцидентий A
 методом поэлементного вклада ветвей

Обобщенная ветвь k ,
 направленная от узла f к узлу t
 и содержащая:
 проводимость y_k , источник ЭДС E_k и источник тока I_k ,
 вносит следующий вклад в узловое уравнение:

Узловая проводимость

$$[Y_n] = \begin{matrix} & f & & t & \\ & & & & \\ & & \dots & & \\ f & \dots & y_k & \dots & -y_k & \dots \\ & & & \dots & & \\ t & \dots & -y_k & \dots & y_k & \dots \\ & & & \dots & & \end{matrix}$$

Таким образом, вместо матрицы инцидентий $A(n,b)$
 для описания топологии нужны 2 вектора:
 From(b) и To(b)
 с номерами узлов для каждой ветви

Для описания содержимого ветвей:
 вектор проводимостей (характеристик), источников ЭДС, источников тока

Эквивалентный узловой источник

$$\bar{I}_n = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & \dots & & \\ f & & + (I_k - y_k E_k) & & \\ & & & \dots & \\ t & & - (I_k - y_k E_k) & & \\ & & & \dots & \end{matrix}$$

Универсальный метод расчета полей и процессов в электрических машинах

МЗК обеспечивает точный анализ магнитной цепи электрической машины с зубчатыми сердечниками

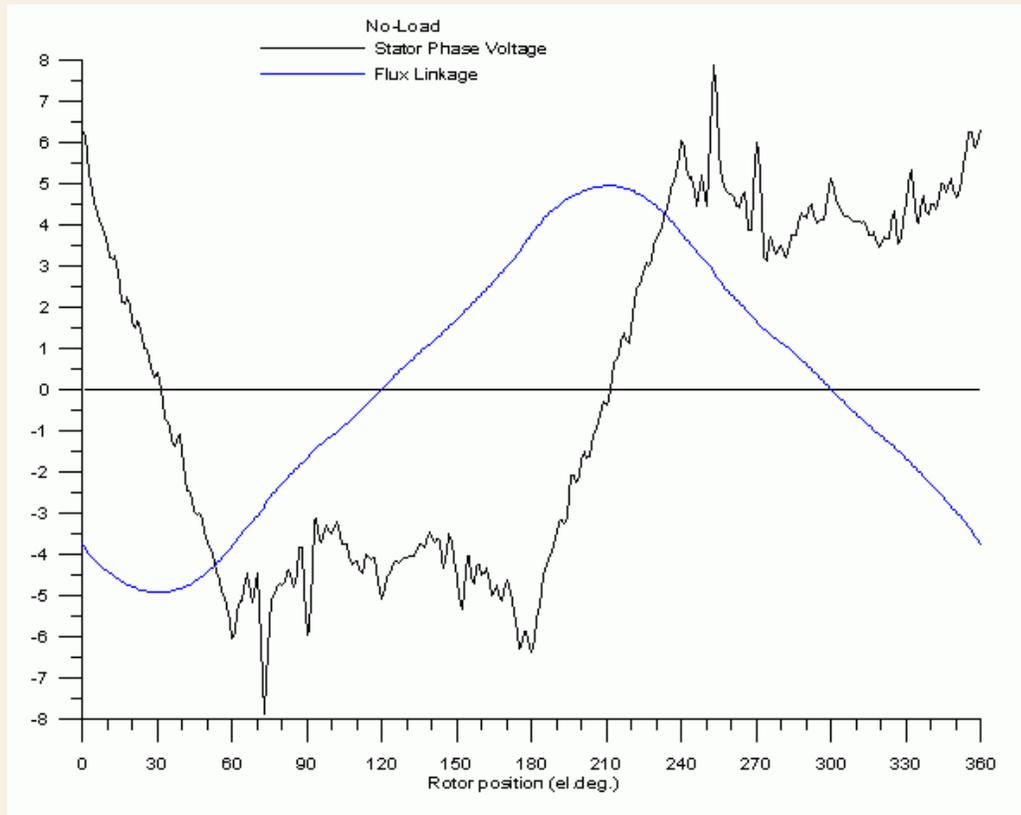
В 1990 проф. В.А.Кузнецов в докторской диссертации сформулировал на базе МЗК полную систему уравнений электрической машины, названную «Универсальный метод расчета полей и процессов в ЭМ»

Уравнения магнитной цепи	$[A_m] \bar{\Phi} = 0$	$\bar{\Phi} = \Lambda \left([A_m]^T \bar{\Phi}_m + \bar{F} \right)$	Система дифференциально-алгебраических уравнений (описывает переходные процессы в ЭМ)
Уравнения электрической цепи	$[A_s] \bar{i} = 0$	$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} = \bar{u} + [A_s]^T \bar{\Phi}_s - \bar{e}_{сл} - [R] \bar{i}$	
Уравнения движения	$J \frac{d\Omega}{dt} = M - M_c$	$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega$	
Уравнения связи	$\bar{F} = [W] \bar{i}_b$	$\bar{\Psi}_b = [W]^T \bar{\Phi}$	

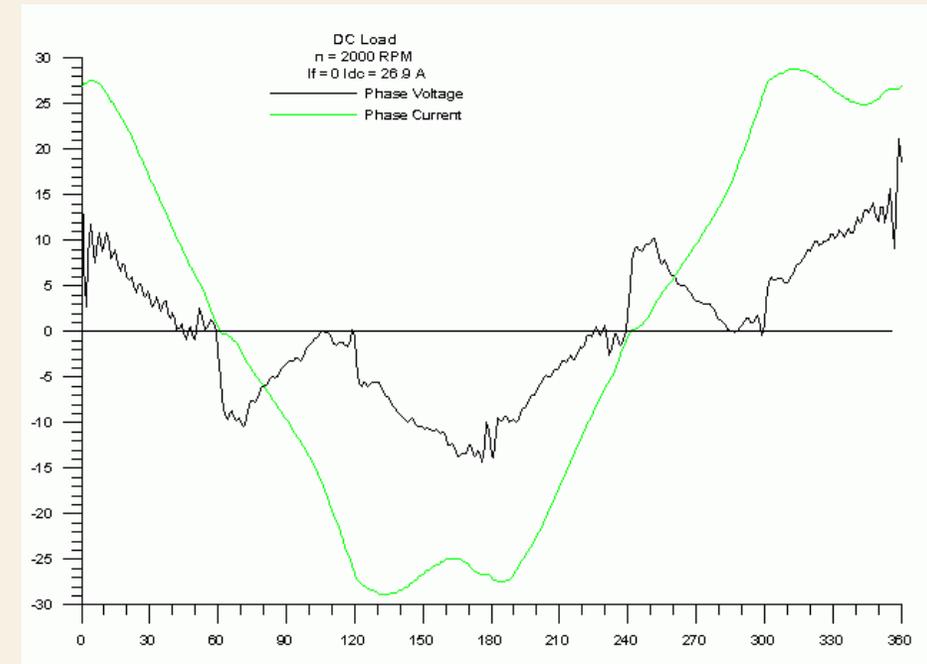
Для решения – численное дифференцирование с решением алгебраических уравнений на каждом шаге
Решение – кривые токов, напряжений, момента и скорости (+ потоки, потокосцепления, потенциалы узлов)

Универсальный метод расчета полей и процессов в электрических машинах

Пример: расчет генератора с гибридным возбуждением,
работающего на выпрямительную нагрузку: ток, напряжение, потокосцепление = $f(t)$



Холостой ход: u_ϕ, Ψ_ϕ

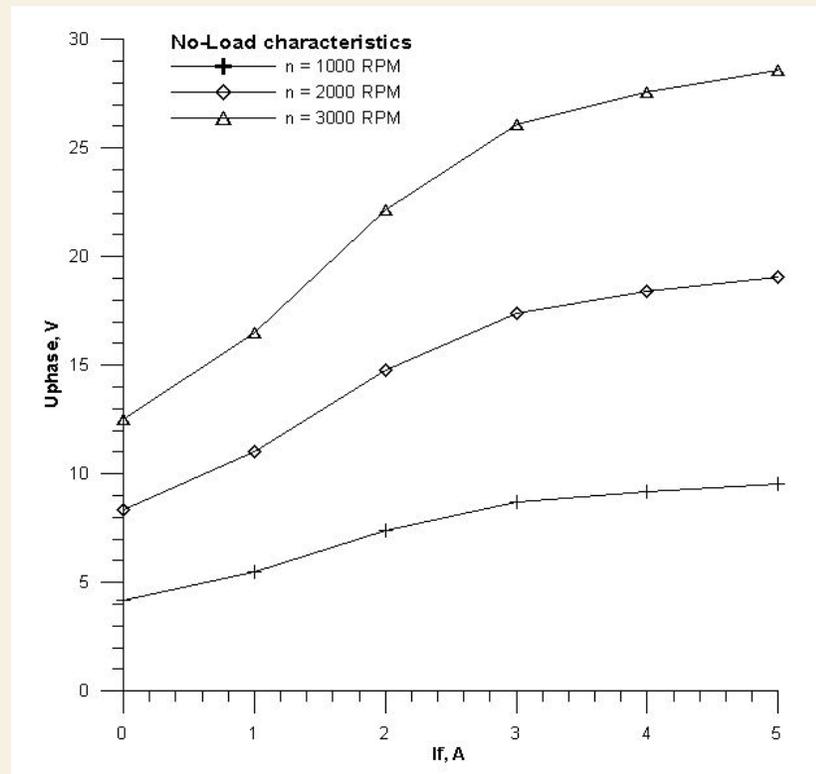


Выпрямительная нагрузка: u_ϕ, i_ϕ

Универсальный метод расчета полей и процессов в электрических машинах

В конце переходного процесса – установившийся режим работы
Из него – действующие значения тока, напряжения (+момент, скорость)

Статические
характеристики



Характеристики XX $u_{\phi} = f(i_{\phi})$ при разных n

При некоторых допущениях возможен
прямой расчет установившегося режима
(без анализа переходного процесса)
по результатам МЗК анализа
– область для исследований