

Методы анализа электрических машин

Уточнение общей теории ЭМ с помощью МЗК
– гармонический анализ

МА-05

2023

Уточнение общей теории электрических машин

Допущения общей теории электрических машин

- отсутствие насыщения
- гладкий немагнитный зазор
- синусоидальные МДС (основная гармоника)

Минимизация допущений – полевой расчет либо применение МЗК (численные модели)

Используем МЗК для уточнения общей теории в рамках аналитической модели

- учтем реальное распределение катушек по пазам
 - дискретность обмотки → ступенчатая кривая МДС
- учтем одностороннюю зубчатость зазора
 - раскрытия пазов → искажения поля в зазоре
 - (другой сердечник – гладкий при эквивалентном зазоре $\delta k_{\delta 2}$)

Учет сложного поля в зазоре проведем с помощью метода гармонического анализа

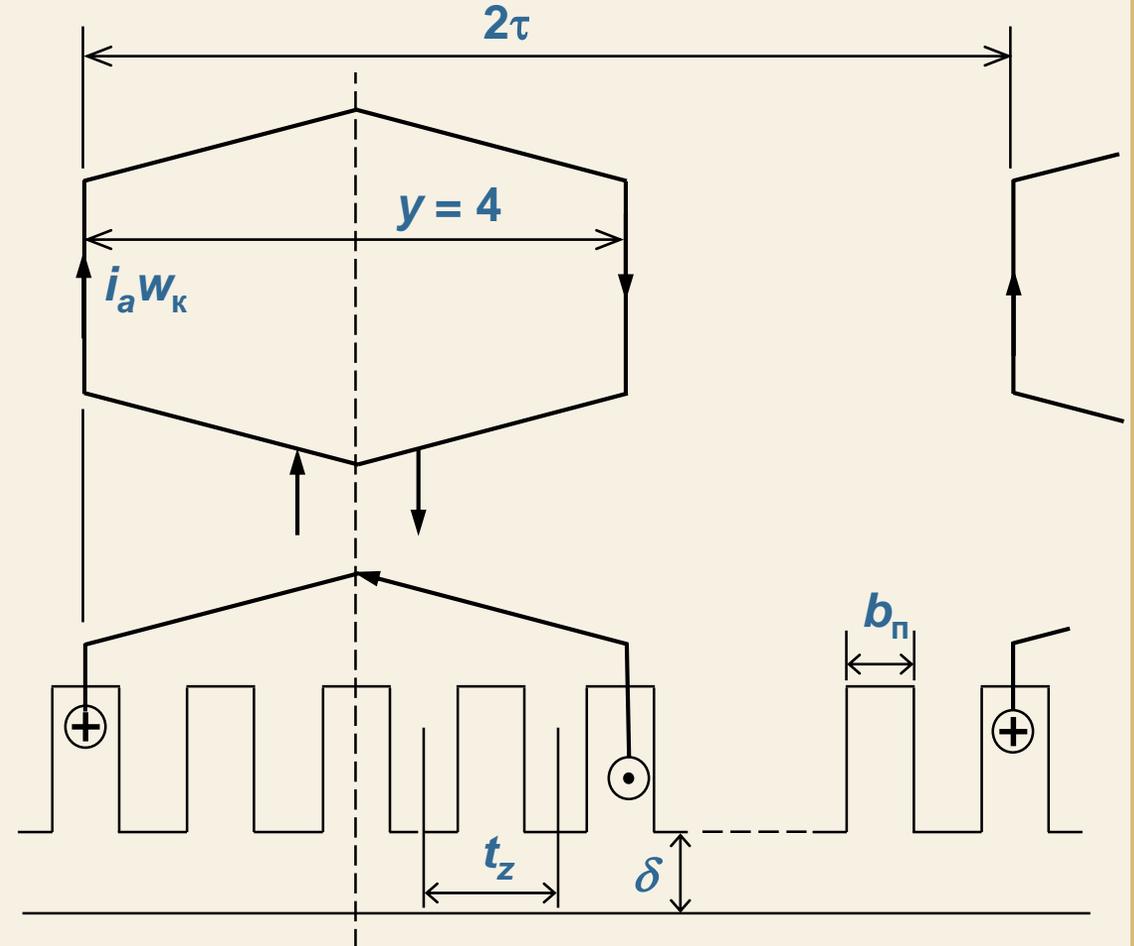
- полевой расчет → кривая B_{δ} → ряд гармоник → анализ действия каждой гармоники → суперпозиция
- расчет гармоник МДС → гармоники B_{δ} → анализ действия каждой гармоники → суперпозиция

Фаза простой обмотки с $q = 1$

Анализ МДС и поля в зазоре от токов обмотки в пазах сердечника начнем с элементарного – рассмотрим фазу простой обмотки с $q = 1$ на одном периоде поля ($Z = 2\tau$)

- одна катушечная группа на периоде
- в группе $q = 1$ катушек
- в катушке w_k витков
- ток фазы $i = \sqrt{2}I \cos(\omega t)$
- ток витка $i_a = i / a$
- сердечник 1 – зубчатый
- сердечник 2 – гладкий
- зазор $\delta \rightarrow \delta'' = \delta k_{\delta 2}$
- b_n – раскрытие паза

Например, для $y = 4$



Фаза простой обмотки с $q = 1$

Воспользуемся МЗК для анализа поля в зазоре
– найдем токи пазов и токи зубцовых контуров

Обозначим пазы

Токи пазов

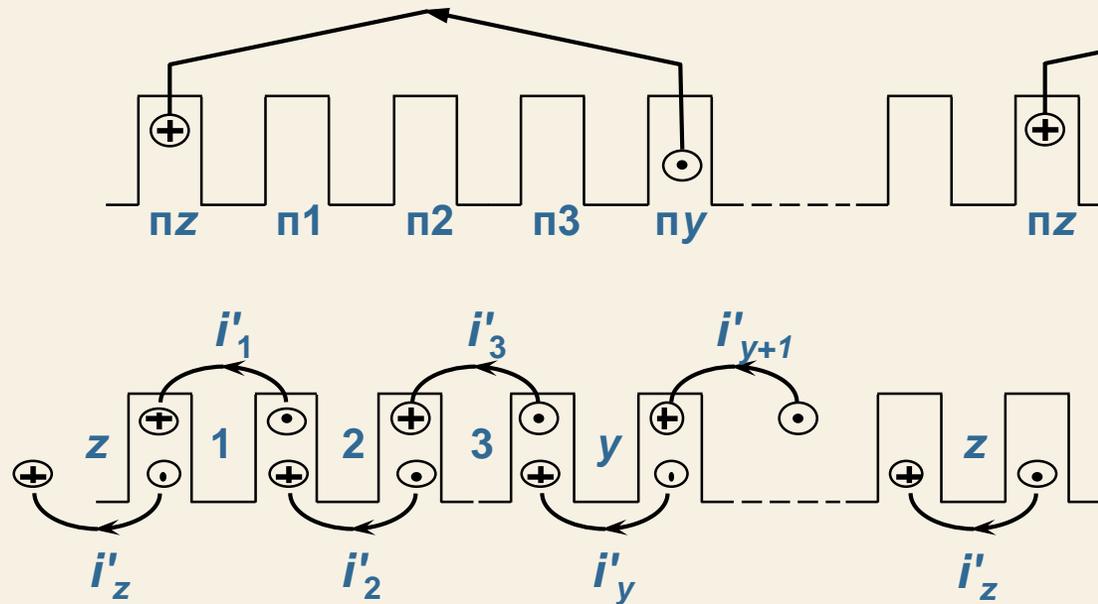
$$i_{пз} = i_a w_k$$

$$i_{пу} = -i_a w_k$$

остальные $i_{пi} = 0$

Обозначим зубцы

Зубцовые контуры



Токи зубцовых контуров
с точностью до постоянной
– *относительные* токи ЗК

пусть $i'_z = 0$

тогда $i'_1 = i'_z + i_{пз} = i_a w_k$

$$i'_2 = i'_1 + i_{п1} = i_a w_k$$

$$i'_3 = i'_2 + i_{п2} = i_a w_k$$

$$i'_y = i'_{y-1} + i_{пу-1} = i_a w_k$$

$$i'_{y+1} = i'_y + i_{пу} = 0$$

...

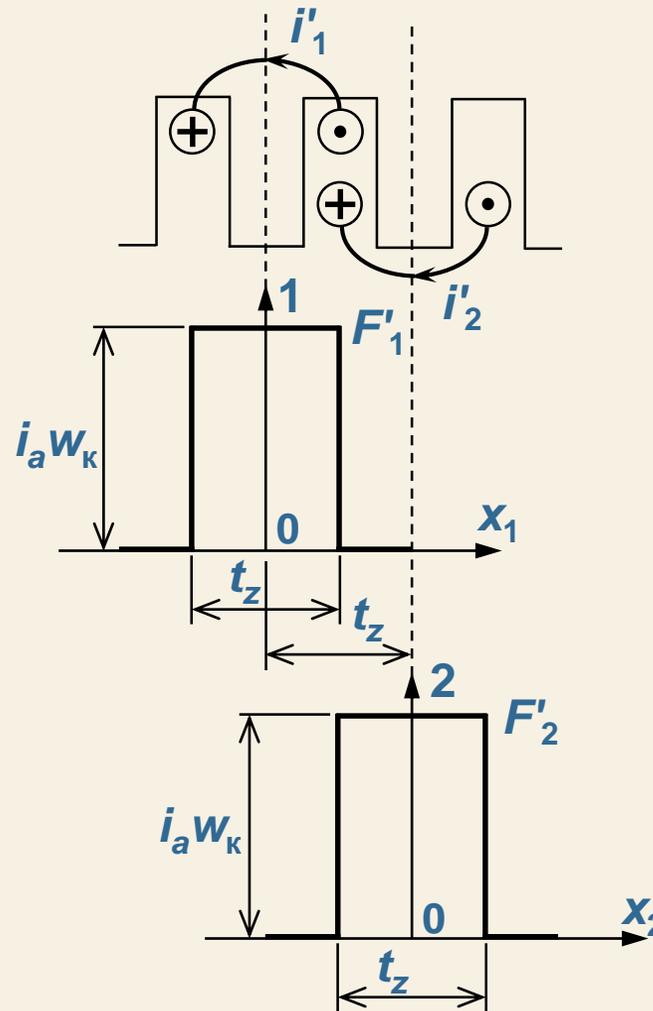
$$i'_{z-1} = 0$$

Фаза простой обмотки с $q = 1$

Найдем МДС зубцового контура
(запишем МДС в собственной системе координат каждого контура)

Начало координат ЗК 1
→ ось ЗК 1

Начало координат ЗК 2
→ ось ЗК 2



Уравнение МДС зубцового контура

- для всех ЗК в пределах катушки
(для k от 1 до y)

$$F'_k = \begin{cases} i'_k = i_a w_k & \text{для } -\frac{t_z}{2} < x_k < \frac{t_z}{2} \\ 0 & \text{для всех других } x_k \end{cases}$$

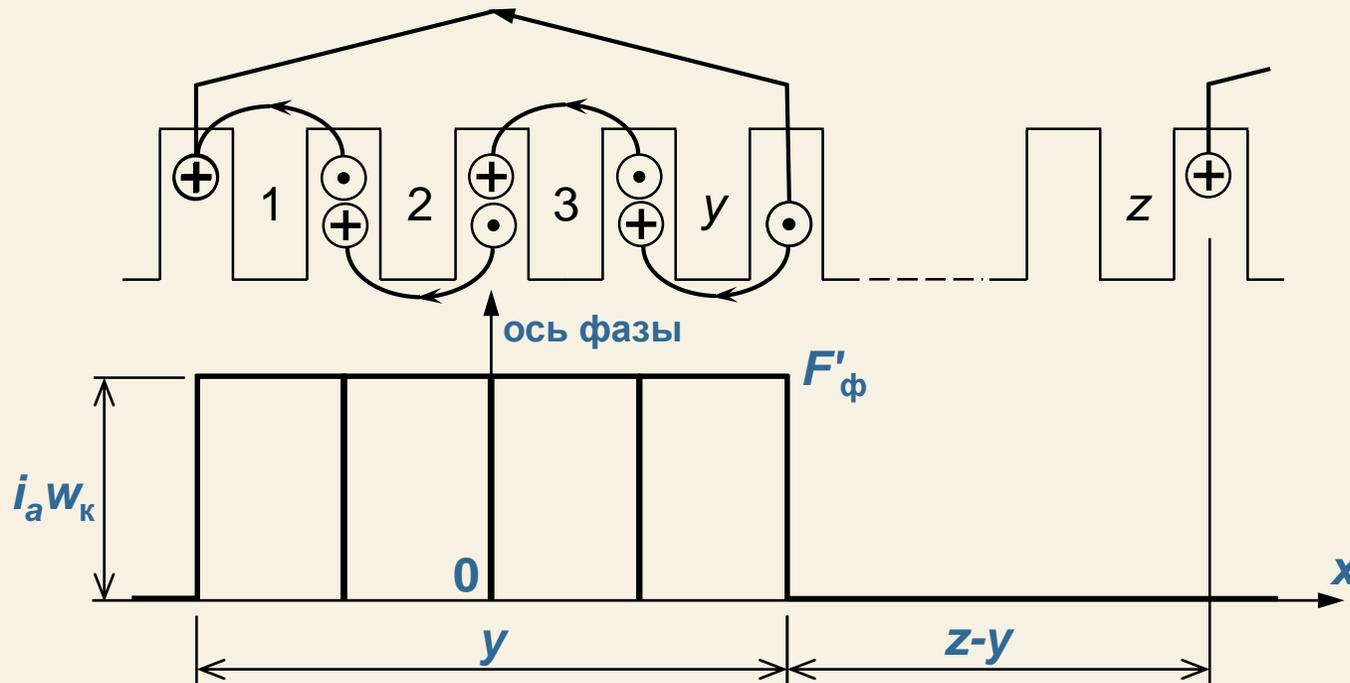
- для всех ЗК за пределами катушки

$$F'_k = i'_k = 0 \quad \text{для всех } x_k$$

Фаза простой обмотки с $q = 1$

Найдем МДС фазы
(в собственной системе координат фазы)

$$F'_\phi = \sum_{k=1}^z F'_k = \sum_{k=1}^y F'_k$$



Уравнение МДС фазы

$$F'_\phi = \begin{cases} i_a W_k & \text{для } -\frac{y}{2} < x < \frac{y}{2} \\ 0 & \text{для всех других } x \end{cases}$$

Фаза простой обмотки с $q = 1$

Найдем точные значения токов ЗК

$$i_k = i'_k + \Delta i$$

Постоянная составляющая токов ЗК
(другой сердечник гладкий)

$$\Delta i = -\frac{1}{z} \sum_{k=1}^z i'_k = -\frac{y i_a w_k}{z}$$

Тогда точные значения токов ЗК:

- для всех ЗК в пределах катушки ($k = 1 \dots y$)
$$i_k = i'_k + \Delta i = i_a w_k - \frac{y i_a w_k}{z} = \frac{z - y}{z} i_a w_k$$
- для всех ЗК за пределами катушки ($k > y$)
$$i_k = i'_k + \Delta i = 0 - \frac{y i_a w_k}{z} = -\frac{y}{z} i_a w_k$$

Точные значения МДС зубцового контура
(в собственной системе координат)

$$F_k = \begin{cases} i'_k + \Delta i & \text{для } -\frac{t_z}{2} < x_k < \frac{t_z}{2} \\ \Delta i & \text{для всех других } x_k \end{cases}$$

Очевидно, можно записать $F_k = F'_k + \Delta F$

где постоянная составляющая МДС ЗК $\Delta F = \Delta i = -\frac{y}{z} i_a w_k$

Фаза простой обмотки с $q = 1$

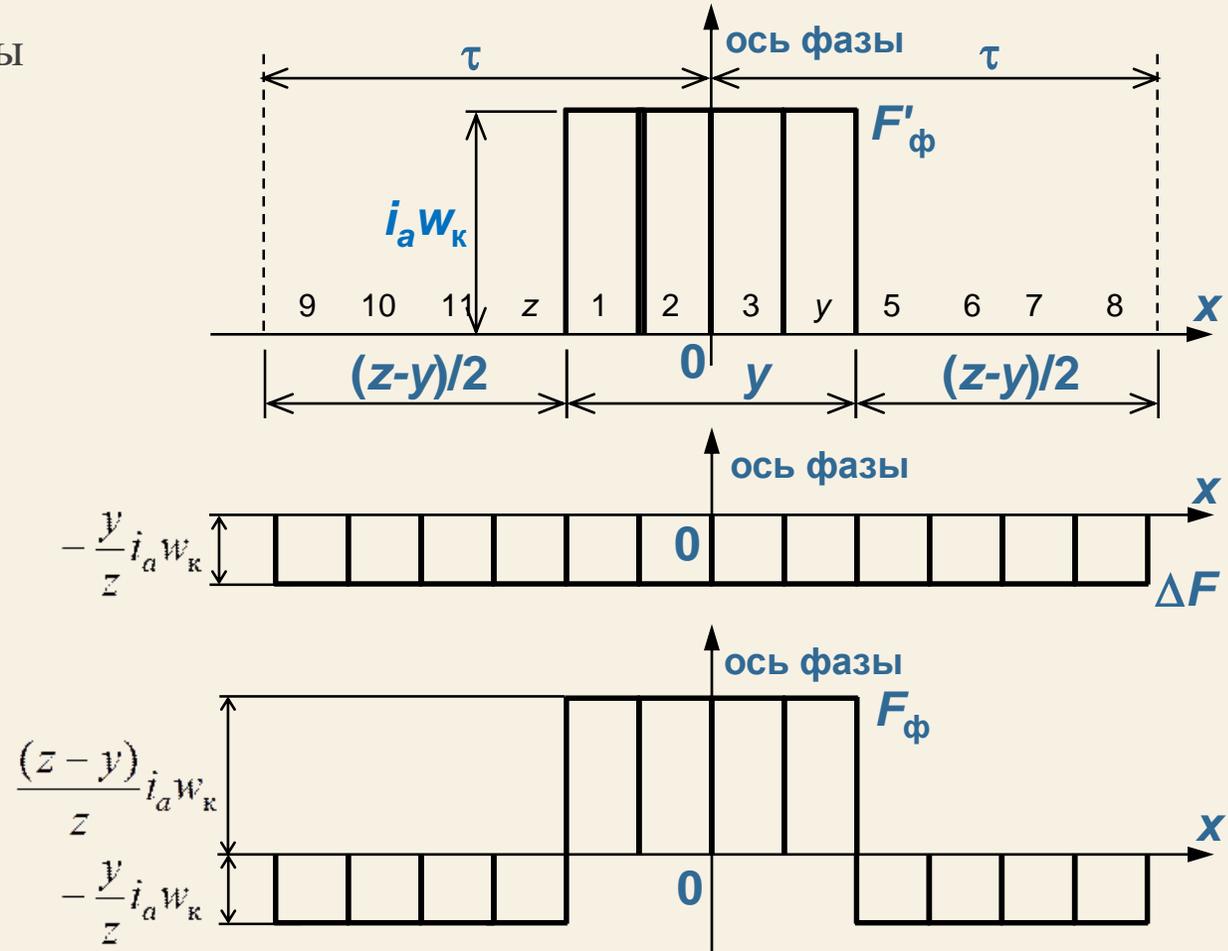
Можно найти точное значение МДС фазы
(в собственной системе координат фазы)

$$F_{\phi} = \sum_{k=1}^z F_k = F'_{\phi} + \Delta F$$

Уравнение МДС фазы

$$F_{\phi} = \begin{cases} \frac{z-y}{z} i_a w_k & \text{для } -\frac{y}{2} < x < \frac{y}{2} \\ -\frac{y}{z} i_a w_k & \text{для всех других } x \end{cases}$$

МДС фазы – периодическая функция
с периодом 2τ и четной симметрией
относительно оси фазы



Гармонический анализ МДС фазы

Для анализа периодической функции (прямоугольная волна МДС фазы) воспользуемся гармоническим анализом

$$F_{\phi} = F_{\phi 0} + \sum_{v=1}^{\infty} F_{\phi v}$$

Постоянная составляющая
(среднее значение на периоде)

$$F_{\phi 0} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F_{\phi} dx = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} (F'_{\phi} + \Delta F) dx = 0$$

(точное значение МДС уже «приведено к нулю»)

Каждая гармоническая составляющая v -го порядка описывается гармонической функцией с полупериодом $\tau_v = \tau/v$

$$F_{\phi v} = F_{\phi vm} \cos \frac{\pi x}{\tau_v} = F_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau}$$

Амплитуда v гармонической МДС фазы

$$\begin{aligned} F_{\phi vm} &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F_{\phi} \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F'_{\phi} \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \Delta F \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx \\ &= F'_{\phi vm} + \Delta F \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = F'_{\phi vm} + 0 \end{aligned}$$

Т.е. гармоника МДС фазы совпадает с гармоникой *относительной* МДС фазы

$$F_{\phi v} = F'_{\phi v} \quad (\text{точные значения не важны, важна амплитуда})$$

Гармонический анализ МДС фазы

Поскольку МДС фазы равна сумме МДС зубцовых контуров (только относительные значения)

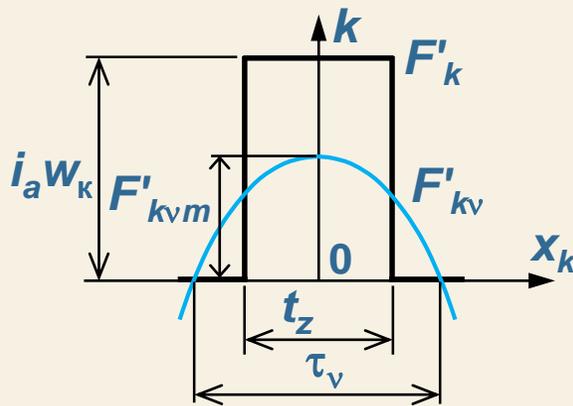
$$F'_\phi = \sum_{k=1}^y F'_k$$

то и ν гармоника МДС фазы равна сумме ν гармоник МДС этих ЗК

$$F_{\phi\nu} = F'_{\phi\nu} = \sum_{k=1}^y F'_{k\nu}$$

Гармоники прямоугольной волны МДС найти легко (в собственной системе координат – четная функция $\rightarrow \cos$)

$$\nu \text{ гармоника МДС ЗК } F'_{k\nu} = F'_{k\nu m} \cos \frac{\nu\pi x_k}{\tau}$$



Амплитуда ν гармоники относительной МДС ЗК

$$F'_{k\nu m} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F'_k \cos \frac{\nu\pi x_k}{\tau} dx_k = \frac{1}{\tau} \int_{-t_z/2}^{t_z/2} (i_a w_k) \cos \frac{\nu\pi x_k}{\tau} dx_k = 2 \frac{i_a w_k}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\pi t_z}{2\tau}$$

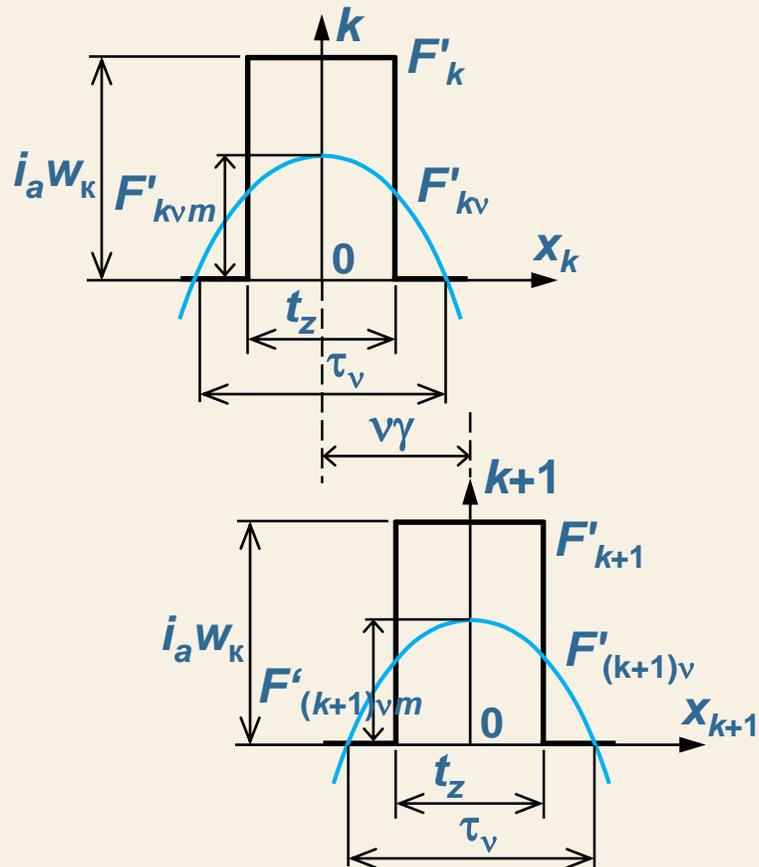
или $= 2 \frac{i_a w_k}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\gamma}{2}$

где $\gamma = \frac{\pi t_z}{\tau}$ – угловой размер зубцового деления t_z

Это справедливо для любого ЗК внутри катушки

Гармонический анализ МДС фазы

МДС соседних ЗК одинаковы, но смещены в пространстве на t_z
(или на эл. угол $v\gamma$ по v гармонике)



Суммировать пространственные гармоники проще
в комплексной форме

Величина МДС контура $F = \text{Re}(\dot{F}_m)$

где \dot{F}_m – комплексная амплитуда МДС, направленная по оси контура

Тогда равенство $F_{\phi v} = \sum_{k=1}^y F'_{kv}$

запишем в виде $\text{Re}(\dot{F}_{\phi vm}) = \sum_{k=1}^y \text{Re}(\dot{F}'_{kv m})$

или $\text{Re}(\dot{F}_{\phi vm}) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kv m}\right)$

Получим векторное равенство $\dot{F}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kv m}$

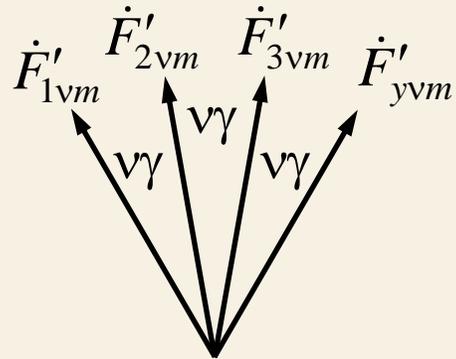
Гармонический анализ МДС фазы

Построим векторное равенство $\dot{F}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kvm}$

и найдем величину МДС фазы $\text{Re}(\dot{F}_{\phi vm})$

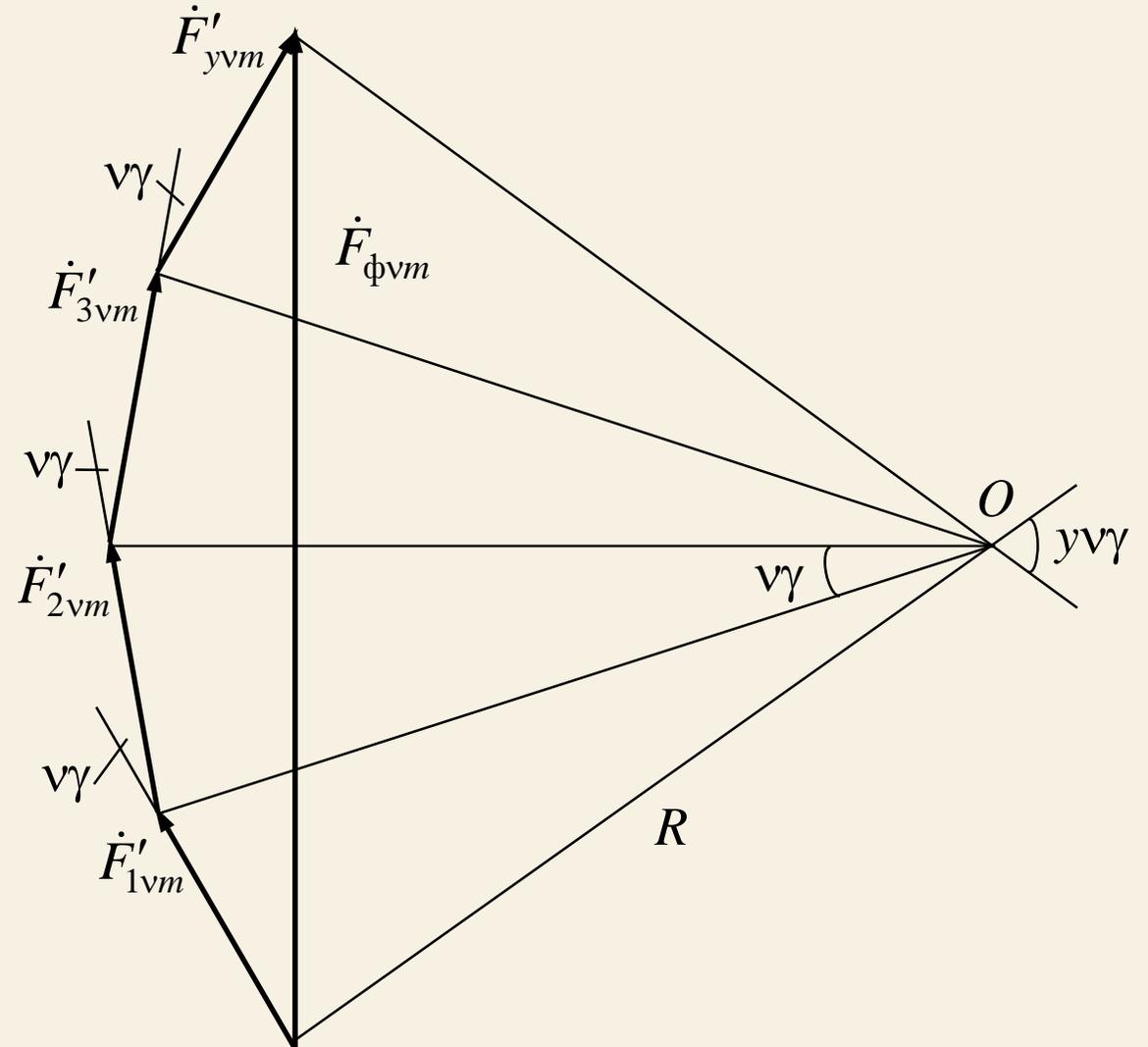
МДС зубцовых контуров \dot{F}'_{kvm}

– одинаковые векторы, сдвинутые на угол $\nu\gamma$



Сумма векторов

Вектора МДС зубцовых контуров
вписаны в окружность радиусом R



Гармонический анализ МДС фазы

Построим срединные перпендикуляры OB и OC

Рассмотрим треугольник OBA

$$|AB| = R \sin \frac{\nu\gamma}{2} \rightarrow F'_{kvm} = \operatorname{Re}(\dot{F}'_{kvm}) = 2R \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

Рассмотрим треугольник OCD

$$|CD| = R \sin \frac{\nu\gamma}{2} \rightarrow F_{\phi vm} = \operatorname{Re}(\dot{F}_{\phi vm}) = 2R \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

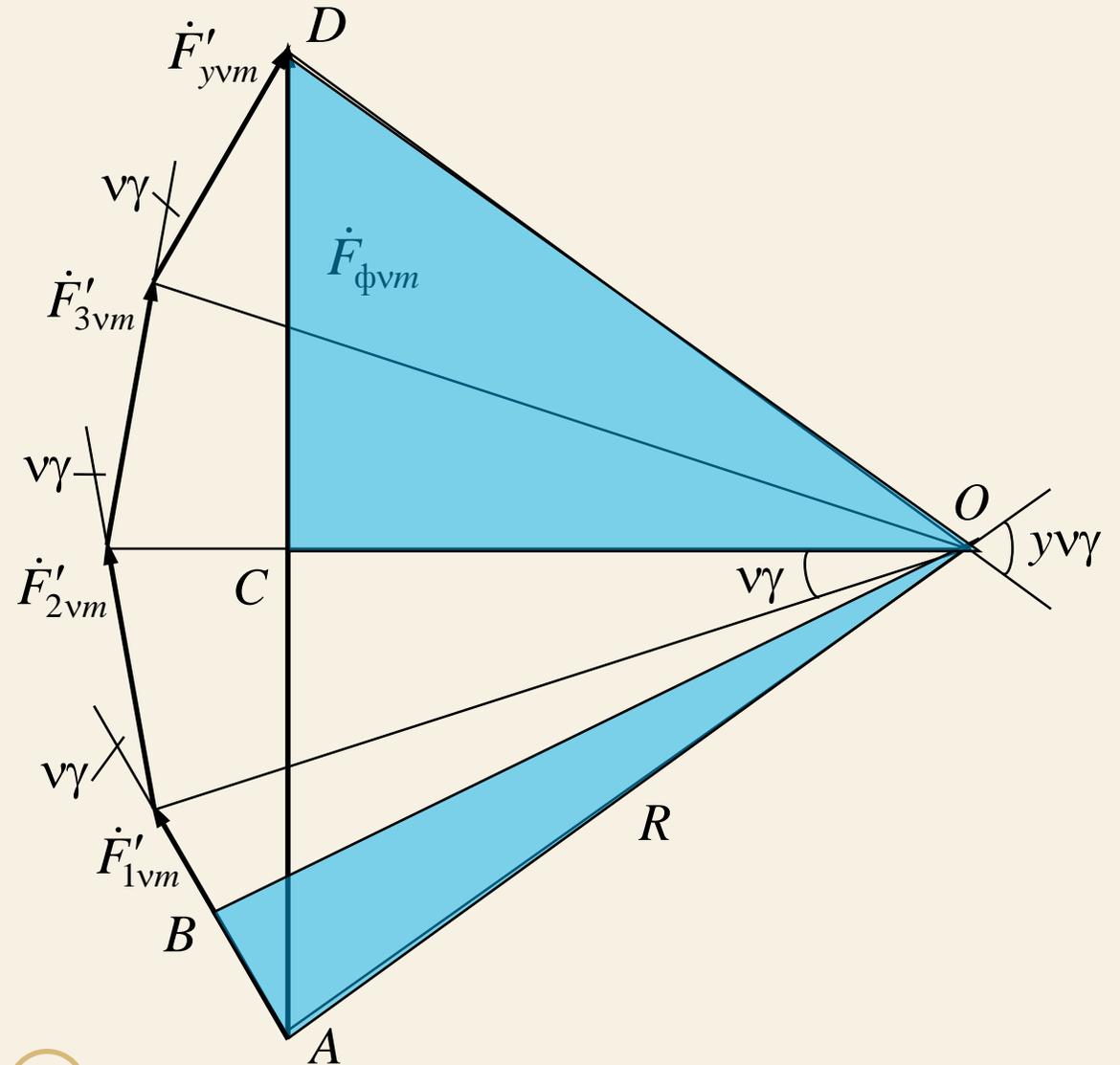
Выразив R , запишем равенство

$$F_{\phi vm} \sin \frac{\nu\gamma}{2} = F'_{kvm} \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

Подставим амплитуду ν гармоники МДС ЗК

$$F_{\phi vm} \sin \frac{\nu\gamma}{2} = \left(2 \frac{i_a w_k}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\gamma}{2} \right) \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

Получим выражение для ν гармоники МДС фазы



Гармонический анализ МДС фазы

Амплитуда ν гармоники МДС фазы $F_{\phi\nu m} = 2 \frac{i_a w_k}{\nu \pi} \sin \frac{y\nu\gamma}{2}$

или $F_{\phi\nu m} = 2 \frac{i_a w_k}{\nu \pi} k_{y\nu}$

где $k_{y\nu}$ – обмоточный коэффициент укорочения по ν гармонике

$$k_{y\nu} = \sin \frac{y\nu\gamma}{2} = \sin \frac{y\nu\pi t_z}{2\tau}$$

Удобно выразить величины в зубцовых делениях:
если $t_z = 1$, то $2\tau = m'q$ (для простой обмотки)

$$k_{y\nu} = \sin \frac{y\nu\pi}{m'q} \quad \text{или} \quad k_{y\nu} = \sin \frac{y\nu\pi}{2\tau} = \sin \beta \frac{\nu\pi}{2}$$

Для обмотки с диаметральной шагом ($y = \tau$, $\beta = 1$) для всех нечетных ν $|k_{y\nu}| = 1$

и амплитуда ν гармоники МДС фазы $F_{\phi\nu m}|_{y=\tau} = 2 \frac{i_a w_k}{\nu \pi}$

Тогда коэффициент укорочения $k_{y\nu} = \frac{F_{\phi\nu m}}{F_{\phi\nu m}|_{y=\tau}}$

При укорочении шага обмотки $y < \tau$
 $k_{y\nu} < 1$ даже для основной гармоники

Гармоники поля

МДС фазы $F_\phi = F'_\phi + \Delta F$ создает магнитное поле в зазоре ЭМ с индукцией $B_\phi = B'_\phi + B_\Delta$

B'_ϕ – индукция магнитного поля, созданного МДС F'_ϕ

B_Δ – индукция магнитного поля, созданного МДС ΔF

Рассмотрим гармоники индукции магнитного поля $B_\phi = \sum_{v=1}^{\infty} B_{\phi v}$ вида $B_{\phi v} = B_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau}$

(постоянная составляющая индукции $B_{\phi 0} = 0$ в силу непрерывности линий магнитного поля)

Амплитуда v гармоники индукции магнитного поля фазы

$$B_{\phi vm} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B_\phi \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B'_\phi \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B_\Delta \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx$$

При постоянном значении ΔF на зубцовом делении B_Δ меняется из-за раскрытия паза, но форма индукции повторяется на каждом t_z

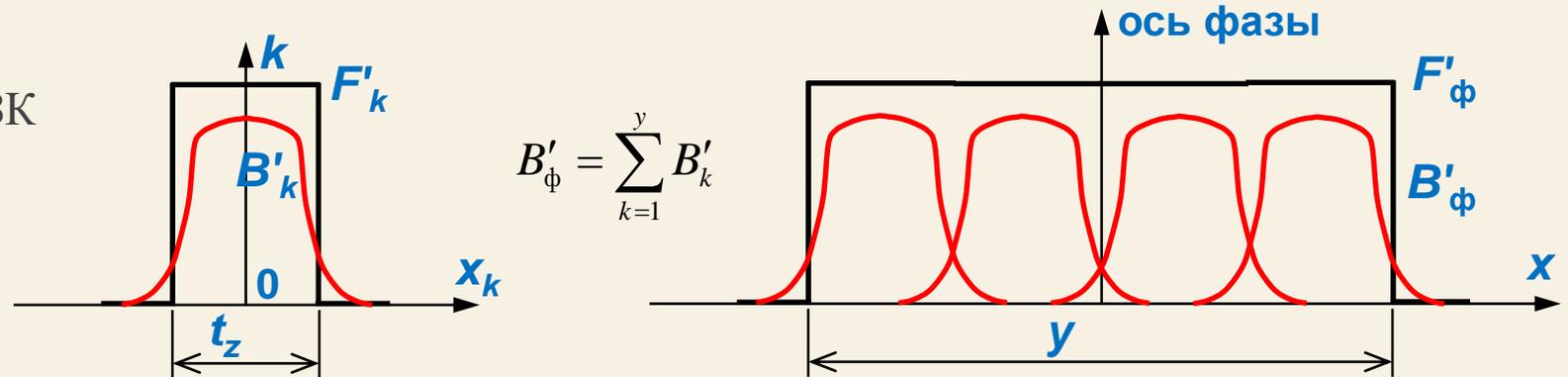
Т.к. B_Δ укладывается на периоде целое число раз ($2\tau/t_z = z$), то $\frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B_\Delta \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = 0$

Гармоника индукции определяется только B'_ϕ , т.е. создается только относительной МДС фазы F'_ϕ

Гармоники поля

При этом B'_ϕ можно представить суммой индукций поля от МДС отдельных зубцовых контуров

Форма кривой индукции поля ЗК определяется геометрией (t_z , b_{II} и δ)

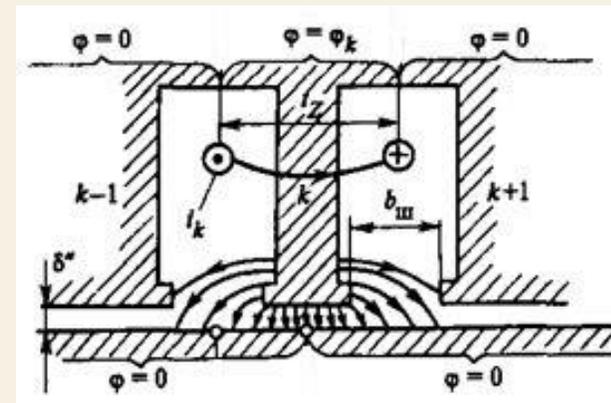


Если контуры являются «глубокими и широкими», то магнитное поле можно рассчитать аналитически (поле в зазоре под пазом равно сумме нечетного поля от тока в пазу и четного поля от тока соседнего паза)

$$B'_k = B_s(x) + B_c(x)$$

Рассчитав кривую индукции поля ЗК, можно разложить ее на гармоники

чтобы просуммировать гармоники зубцовых контуров



Гармоники поля

Можно найти кривую индукции ЗК и разложить ее на гармоники – как правило, это можно сделать только численно

В инженерной практике для расчета гармоник индукции ЗК используют методику Т.Г. Сорокера

Прямоугольная МДС k зубцового контура (на рисунке – φ_k) создает реальную кривую индукции B_k , с гармониками B_{kv} (B_{kvm} и τ_v)

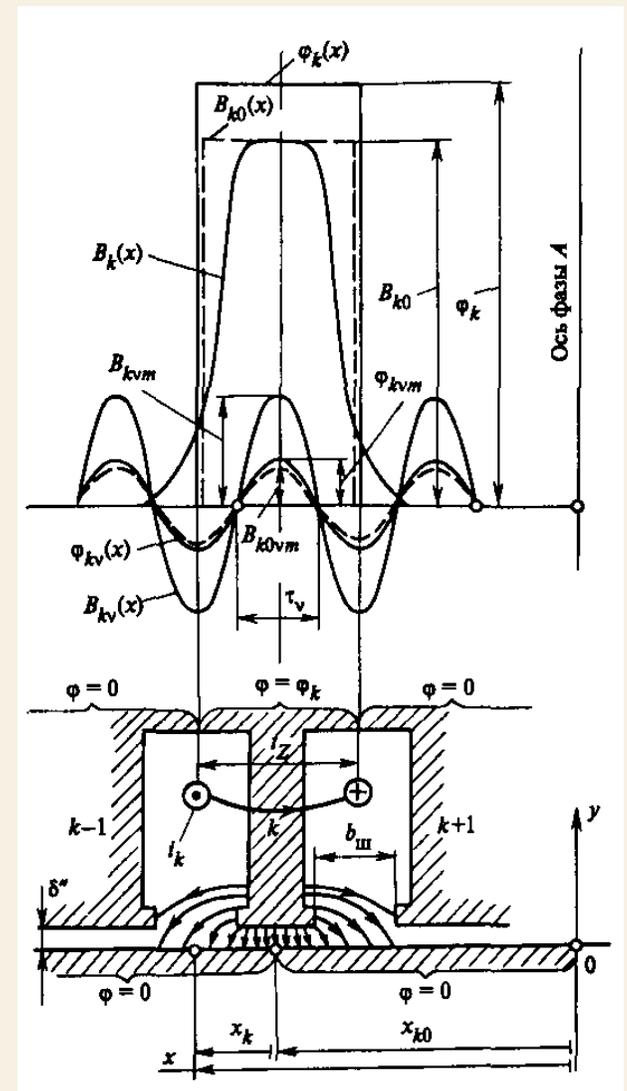
Если предположить идеализированную кривую индукции B_{k0} , (пусть ее ширина равна t_z , как у МДС, а амплитуда $B_{k0} = \mu_0 F_k / \delta$), то ее v гармоники B_{k0v} будут иметь то же τ_v и другую амплитуду B_{k0vm}

Гармоники прямоугольной волны B_{k0} легко найти

$$\tau_v = \frac{\tau}{v} \quad \text{и} \quad B_{k0vm} = \frac{\mu_0 F_{kvm}}{\delta}, \quad \text{где} \quad F_{kvm} = 2 \frac{i_a w_k}{v\pi} k_{yv}$$

Но они не совпадают с гармониками B_k из-за влияния пазов

$$C_v = \frac{B_{kvm}}{B_{k0vm}} \quad \text{– коэффициент пазовости для } v \text{ гармоники} \\ \text{(коэффициент влияния пазов)}$$



Гармоники поля

Коэффициент C_v одинаков для всех t_z

Величина C_v определяется геометрией зазора и ν

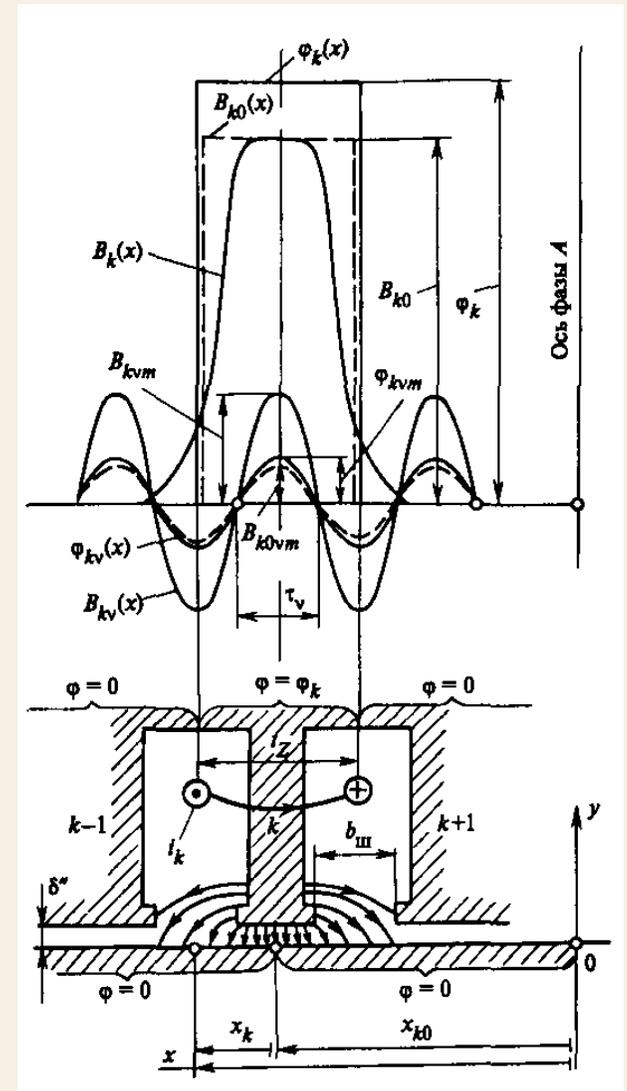
$$C_v = f\left(\frac{b_{\text{п}}}{\delta''}; \frac{b_{\text{п}}}{t_z}; \frac{Z}{\nu p}\right) \quad \text{Для } \nu = 1 \quad C_1 \approx \frac{1}{k_{\delta 1}}$$

Инженерный подход: расчет C_v находят гармоники реальной индукции через гармоники идеализированной индукции

$$B_{k\nu m} = B_{k0\nu m} C_v = \frac{\mu_0 F_{k\nu m}}{\delta} C_v$$

Коэффициент пазовости C_v :

- по таблицам (номограммам) заранее рассчитанных значений в книгах по проектированию ЭМ
- по приближенной методике расчета в учебнике Иванова-Смоленского А.В. Электрические машины. Том 1. с.321



Гармоники поля

Итак, можем найти гармоники индукции поля от относительных МДС зубцовых контуров

$$B'_{kvm} = \frac{\mu_0 F'_{kvm}}{\delta} C_v$$

Гармонику поля фазы найдем как сумму v гармоник полей зубцовых контуров

$$B_{\phi v} = B_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau} = \sum_{k=1}^y B'_{kvm} \cos \frac{v\pi x_k}{\tau}$$

Поскольку оси ЗК сдвинуты в пространстве на $v\gamma$, используем векторную сумму комплексных амплитуд

$$\dot{B}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \dot{B}'_{kvm}$$

Комплексная амплитуда v гармоники поля k зубцового контура $\dot{B}'_{kvm} = \frac{\mu_0 \dot{F}'_{kvm}}{\delta} C_v$

$$\text{Тогда } \dot{B}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \frac{\mu_0 \dot{F}'_{kvm}}{\delta} C_v = \frac{\mu_0}{\delta} C_v \sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kvm} = \frac{\mu_0}{\delta} C_v \dot{F}_{\phi vm}$$

$$\text{Т.о. амплитуда } v \text{ гармоники поля фазы } B_{\phi vm} = \frac{\mu_0 F_{\phi vm}}{\delta} C_v = \frac{2(i_a w_k) k_{yv} \mu_0 C_v}{v\pi\delta}$$

Просуммировав все гармоники, получим кривую индукции полного поля фазы $B_{\phi} = \sum_{v=1}^{\infty} B_{\phi v}$

Фаза простой обмотки с произвольным q

Рассмотрим фазу простой многофазной двухслойной обмотки, имеющей q катушек в катушечной группе

Представим ее как совокупность q элементарных фаз, имеющих $q = 1$, одинаковый шаг y и смещенных на t_z

Каждая элементарная фаза n создает МДС F_{ϕ}^n

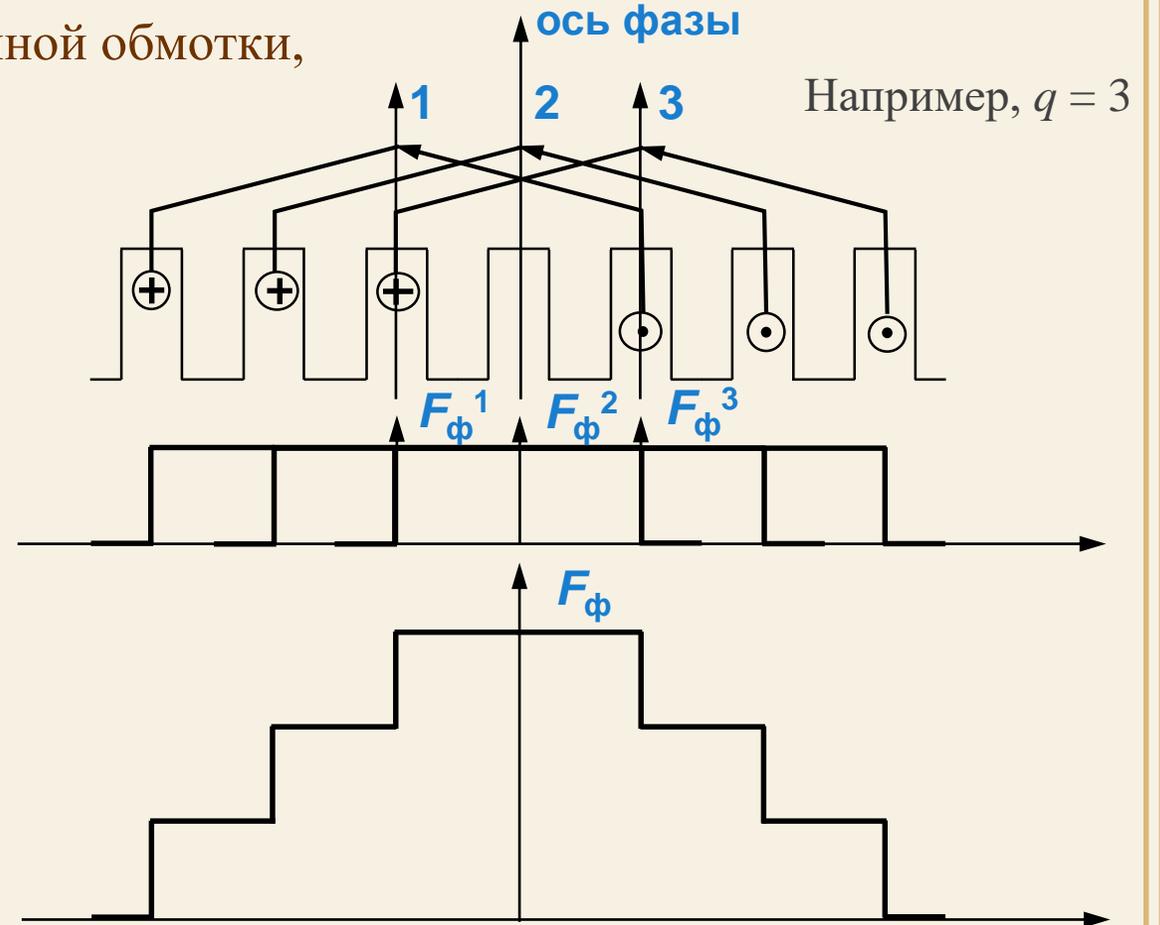
Полная МДС фазы $F_{\phi} = F_{\phi}^1 + F_{\phi}^2 + F_{\phi}^3 = \sum_{n=1}^q F_{\phi}^n$

Каждая МДС F_{ϕ}^n раскладывается на гармоники

$$F_{\phi v}^n = F_{\phi v m}^n \cos \frac{\nu \pi x_n}{\tau}$$

Гармоника МДС фазы может быть собрана из гармоник элементарных фаз

$$F_{\phi v} = F_{\phi v m} \cos \frac{\nu \pi x}{\tau} = \sum_{n=1}^q F_{\phi v}^n$$



Фаза простой обмотки с произвольным q

Все ν гармоники МДС элементарных фаз одинаковы, но смещены в пространстве на t_z (или на эл. угол $\nu\gamma$ по ν гармонике)

Для правильного суммирования ν гармоник МДС элементарных фаз воспользуемся векторной суммой их комплексных амплитуд

$$\dot{F}_{\phi\nu m} = \sum_{n=1}^q \dot{F}_{\phi\nu m}^n$$

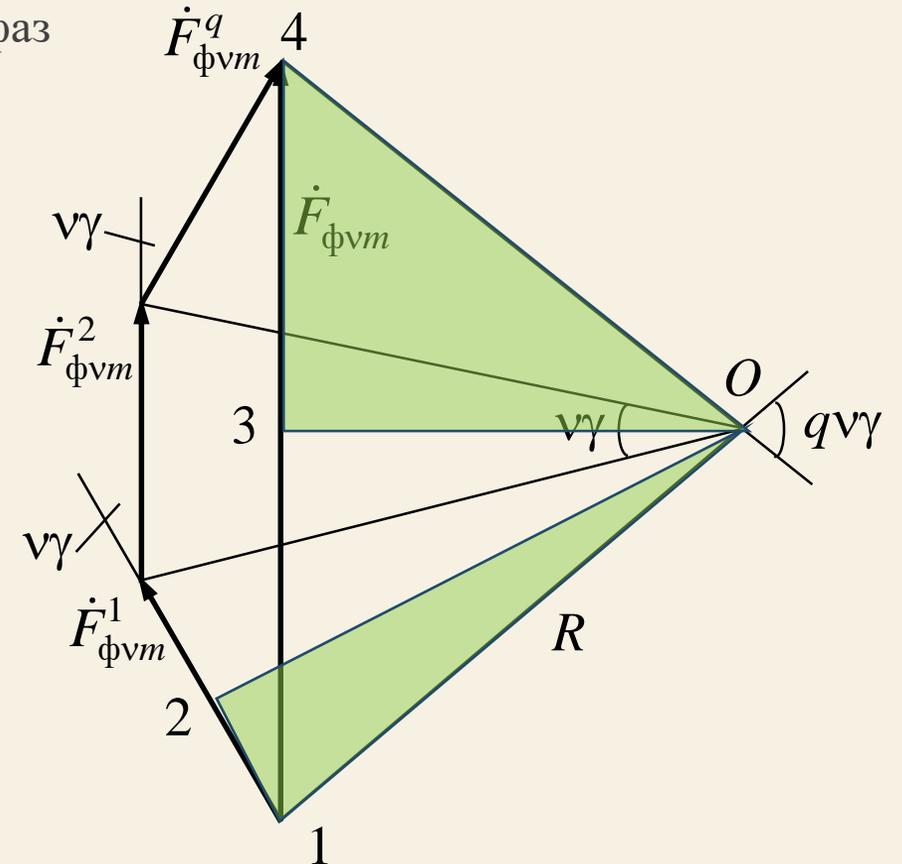
Впишем вектора в окружность радиусом R

Из треугольника 012: $F_{\phi\nu m}^n = 2R \sin \frac{\nu\gamma}{2}$

Из треугольника 034: $F_{\phi\nu m} = 2R \sin \frac{q\nu\gamma}{2}$

Тогда $F_{\phi\nu m} \sin \frac{\nu\gamma}{2} = F_{\phi\nu m}^n \sin \frac{q\nu\gamma}{2}$

Т.о. амплитуда ν гармоники МДС фазы $F_{\phi\nu m} = F_{\phi\nu m}^n \frac{\sin \frac{q\nu\gamma}{2}}{\sin \frac{\nu\gamma}{2}}$



Фаза простой обмотки с произвольным q

Перепишем амплитуду v гармоники МДС фазы

$$F_{\phi vm} = F_{\phi vm}^n \frac{\sin \frac{qv\gamma}{2}}{\sin \frac{v\gamma}{2}} = F_{\phi vm}^n q \frac{\sin \frac{qv\gamma}{2}}{q \sin \frac{v\gamma}{2}} = F_{\phi vm}^n q k_{pv}$$

где k_{pv} – обмоточный коэффициент распределения по v гармонике

$$k_{pv} = \frac{\sin \frac{qv\gamma}{2}}{q \sin \frac{v\gamma}{2}} \quad \text{или в} \quad k_{pv} = \frac{\sin \frac{qv\pi t_z}{2\tau}}{q \sin \frac{v\pi t_z}{2\tau}} = \frac{\sin \frac{qv\pi}{2\tau}}{q \sin \frac{v\pi}{2\tau}} \quad \text{для} \quad k_{pv} = \frac{\sin \frac{qv\pi}{m'q}}{q \sin \frac{v\pi}{m'q}} = \frac{\sin \frac{v\pi}{m'}}{q \sin \frac{v\pi}{m'q}}$$

зубцовых делениях простой обмотки

Коэффициент распределения $k_{pv} = \frac{F_{\phi vm}}{qF_{\phi vm}^n}$ показывает уменьшение МДС фазы по сравнению с алгебраической суммой МДС элементарных фаз

При распределении обмотки по пазам $q > 1$ $k_{pv} < 1$ даже для основной гармоники

Фаза простой обмотки с произвольным q

Итак, амплитуда v гармоники МДС фазы обмотки с произвольным q

$$F_{\phi vm} = F_{\phi vm}^n q k_{pv} = \frac{2(i_a w_k) k_{yv}}{v\pi} q k_{pv}$$

Заметим, что число витков в фазе простой обмотки $w' = \frac{p}{a} q w_k$

тогда $w_k = \frac{aw'}{pq}$ и выражение можно переписать $F_{\phi vm} = \frac{2(i_a a) w'}{v\pi p} k_{yv} k_{pv}$

А поскольку $i_a = i / a$, амплитуда v гармоники МДС фазы запишется как $F_{\phi vm} = \frac{2iw'}{v\pi p} k_{yv} k_{pv}$

Теперь для любой простой обмотки с произвольным q можно определить:

Полная МДС фазы $F_{\phi} = \sum_{v=1}^{\infty} F_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau}$

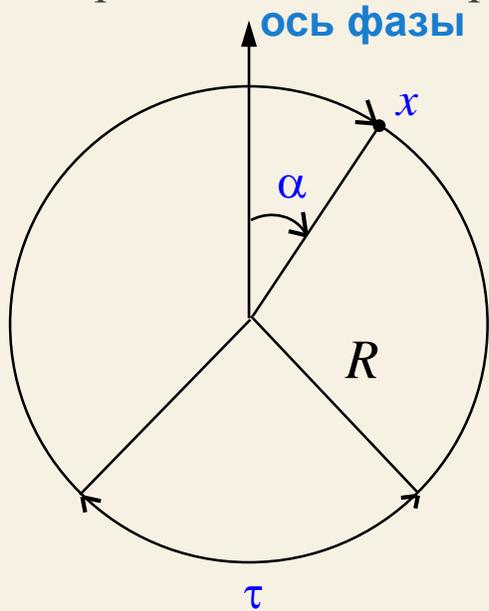
Индукция магнитного поля фазы $B_{\phi} = \sum_{v=1}^{\infty} B_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu_0 F_{\phi vm} C_v}{\delta} \cos \frac{v\pi x}{\tau}$

Гармоника как волна

Выражения для гармоник МДС и индукции во вращающихся машинах удобно записать через угловые координаты

Например, ν гармоника МДС фазы $F_{\phi\nu} = F_{\phi\nu m} \cos \frac{\nu\pi x}{\tau}$

На средней линии зазора $x = \alpha R$, $2\pi R = 2p\tau \rightarrow \tau = \frac{2\pi R}{2p}$



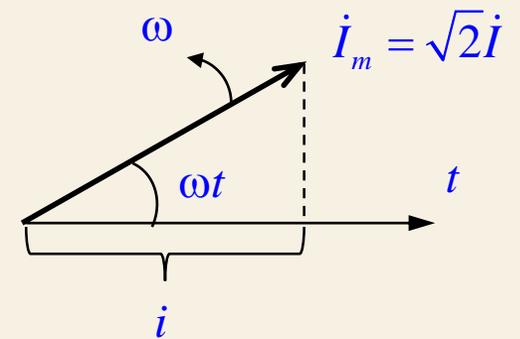
Тогда $\cos \frac{\nu\pi x}{\tau} = \cos \left(\frac{\nu\pi\alpha R}{2\pi R} 2p \right)$
 $= \cos \nu p \alpha = \cos \nu \alpha_1$

При этом амплитуда ν гармоники МДС фазы

$$F_{\phi\nu m} = \frac{2i\nu'}{\nu\pi p} k_{y\nu} k_{p\nu}$$

Здесь i – мгновенное значение тока фазы

$$i = \sqrt{2}I \cos \omega t$$



Т.е. $F_{\phi\nu} = \frac{2\sqrt{2}I\nu' k_{y\nu} k_{p\nu}}{\nu\pi p} \cos \omega t \cos \nu p \alpha$

Гармоника как волна

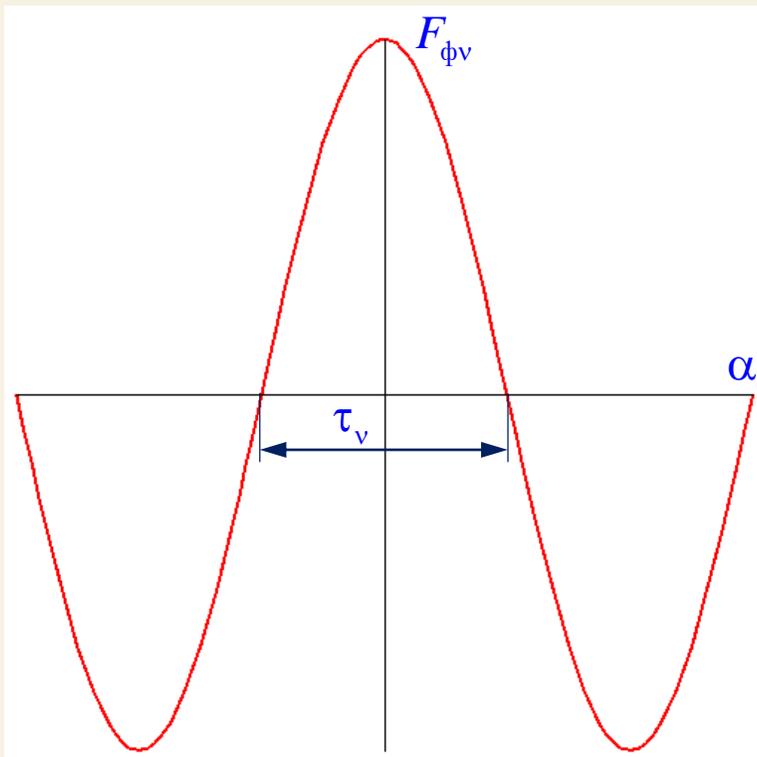
Итак, ν гармоника МДС фазы записывается как

$$F_{\phi\nu} = F_{\phi\nu m} \cos \omega t \cdot \cos \nu p \alpha$$

$$F_{\phi\nu m} = \frac{2\sqrt{2}Iw'k_{y\nu}k_{p\nu}}{\nu\pi r}$$

изменение
во времени
(max при $t = 0$)

изменение
в пространстве
(max на оси фазы
при $\alpha = 0$)



Это уравнение пульсирующей волны

- при изменении тока изменяется величина МДС, но пространственное распределение сохраняется
- ось волны МДС неподвижна в пространстве (совпадает с осью фазы)

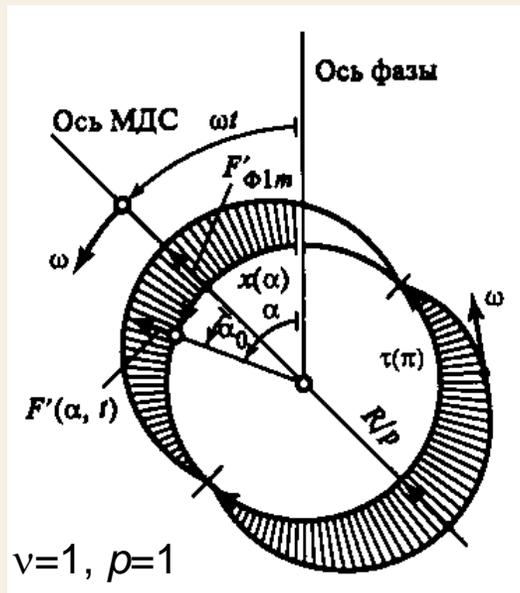
Гармоника как волна

Выражение для пульсирующей волны МДС можно переписать так

$$F_{\phi v}(\alpha, t) = F_{\phi v m} \cos \omega t \cdot \cos v p \alpha = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha) + \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + v p \alpha) = F_{\phi v}^{\text{пр}}(\alpha, t) + F_{\phi v}^{\text{обр}}(\alpha, t)$$

Здесь $F_{\phi v}^{\text{пр}}(\alpha, t)$ – прямо-вращающаяся волна МДС

$F_{\phi v}^{\text{обр}}(\alpha, t)$ – обратно-вращающаяся волна МДС

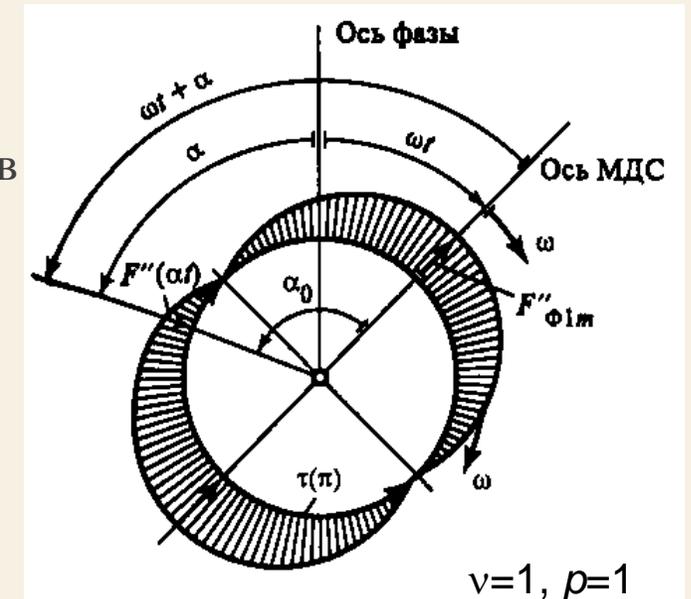


Ось прямой МДС вращается в сторону «+» углов с угловой скоростью $\Omega_v^{\text{пр}} = \omega / v p$

Ось обратной МДС вращается в сторону «-» углов с угловой скоростью $\Omega_v^{\text{обр}} = -\omega / v p$

Амплитуды волн равны $F_{\phi v m}^{\text{пр}} = F_{\phi v m}^{\text{обр}} = \frac{1}{2} F_{\phi v m}$

Пространственное распределение волны относительно оси МДС неизменно (cos) → неизменная волна вращается в пространстве

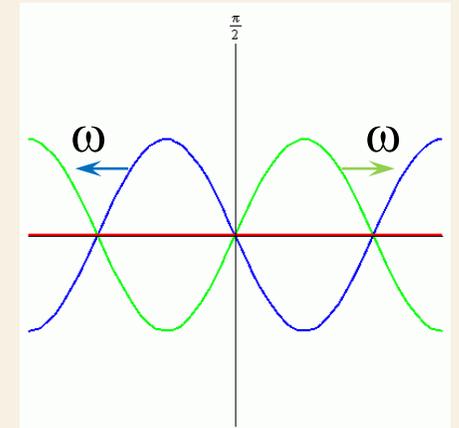
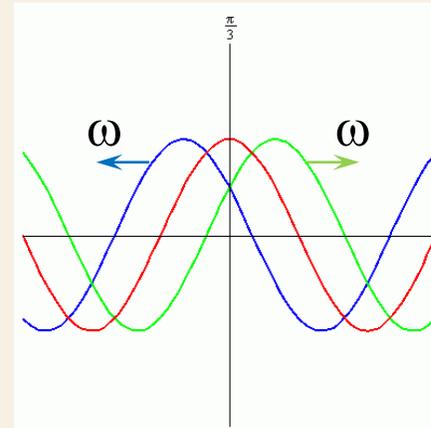
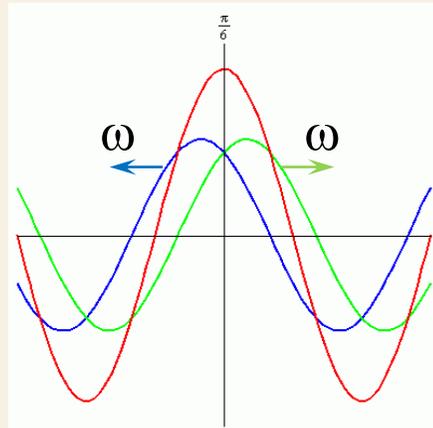
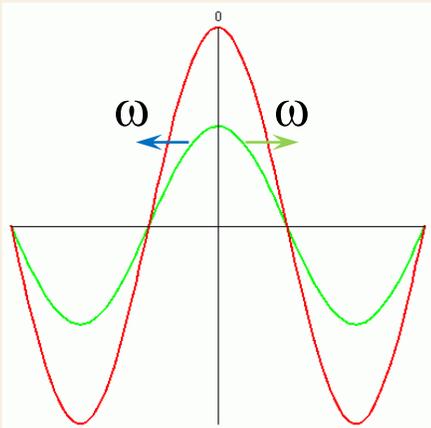


Гармоника как волна

При $t = 0$ обе волны совпадают в пространстве с осью фазы
Их сумма дает максимальную пульсирующую волну МДС

С течением времени волны движутся
в противоположные стороны
с одинаковыми скоростями \rightarrow их сумма
всегда дает \cos с максимумом на оси фазы

При $\omega t = \pi/2$ волны находятся
в противофазе, их сумма = 0



Угловая скорость в электрических град.

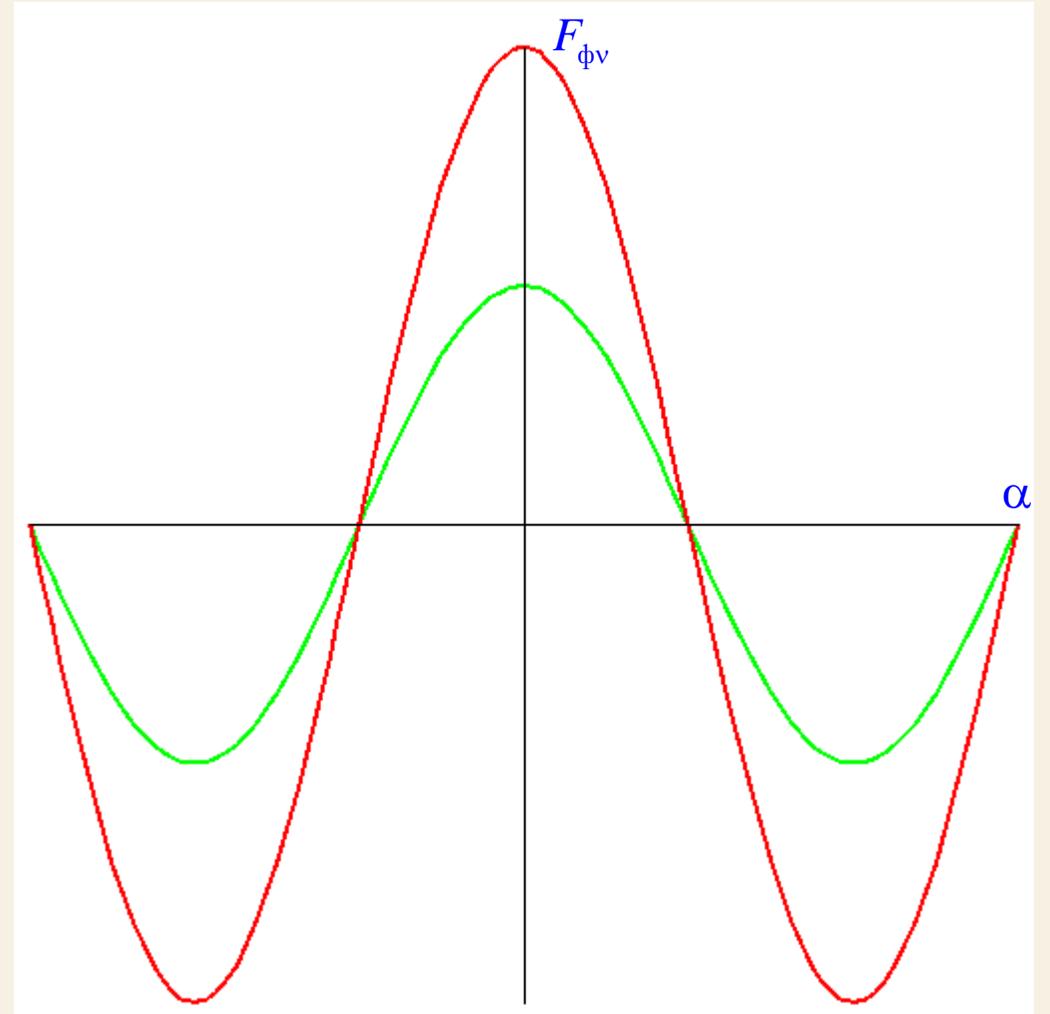
$$\omega_v^{\text{пр}} = \Omega_v^{\text{пр}} p = \frac{\omega_1}{v}$$

$$\omega_v^{\text{обр}} = \Omega_v^{\text{обр}} p = -\frac{\omega_1}{v}$$

Гармоника как волна

Разложение пульсирующей волны МДС
на прямую и обратные волны

$$F_{\phi v} = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - \nu p \alpha) + \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + \nu p \alpha)$$



Гармоника как волна

Разложение пульсирующей волны МДС на прямую и обратные волны

$$F_{\phi v} = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha) + \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + v p \alpha)$$



Прямо-вращающаяся волна МДС фазы $F_{\phi v}^{\text{пр}}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha)$

Обратно-вращающаяся волна МДС фазы $F_{\phi v}^{\text{обр}}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + v p \alpha)$

Если принять, что для прямой волны v положительно, а для обратной волны v отрицательно, то обе волны можно описать одним уравнением

$$F_{\phi v}^{\text{вр}}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha) \quad \text{где } v = -\infty \dots -2; -1; 0; +1; +2 \dots +\infty$$

$$\text{Угловая скорость } \Omega_v = \frac{\omega}{v p}$$

Простая многофазная обмотка

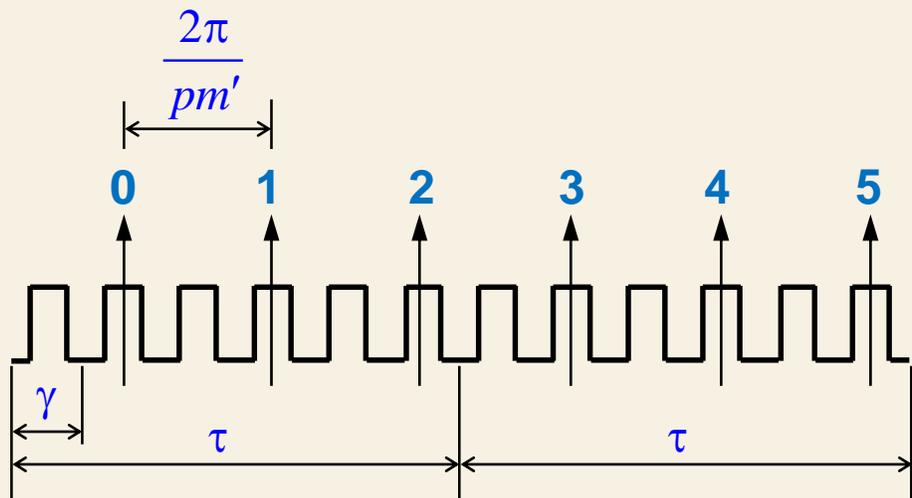
Рассмотрим простую многофазную двухполюсную обмотку с числом фаз m' , питаемую симметричной системой токов $i_n = \sqrt{2}I \cos \omega t_n$

Например, $m' = 6$, $q = 2$ и $p = 1$

Число зубцов на периоде $z = pm'q = 12$, полюсное деление $\tau = m'q / 2 = 6$

Угловой размер зубцового деления $\gamma = \frac{2\pi}{z}$

Угол сдвига между соседними фазами $\gamma_{nn+1} = \frac{2\pi}{pm'} = \frac{2\pi}{6}$



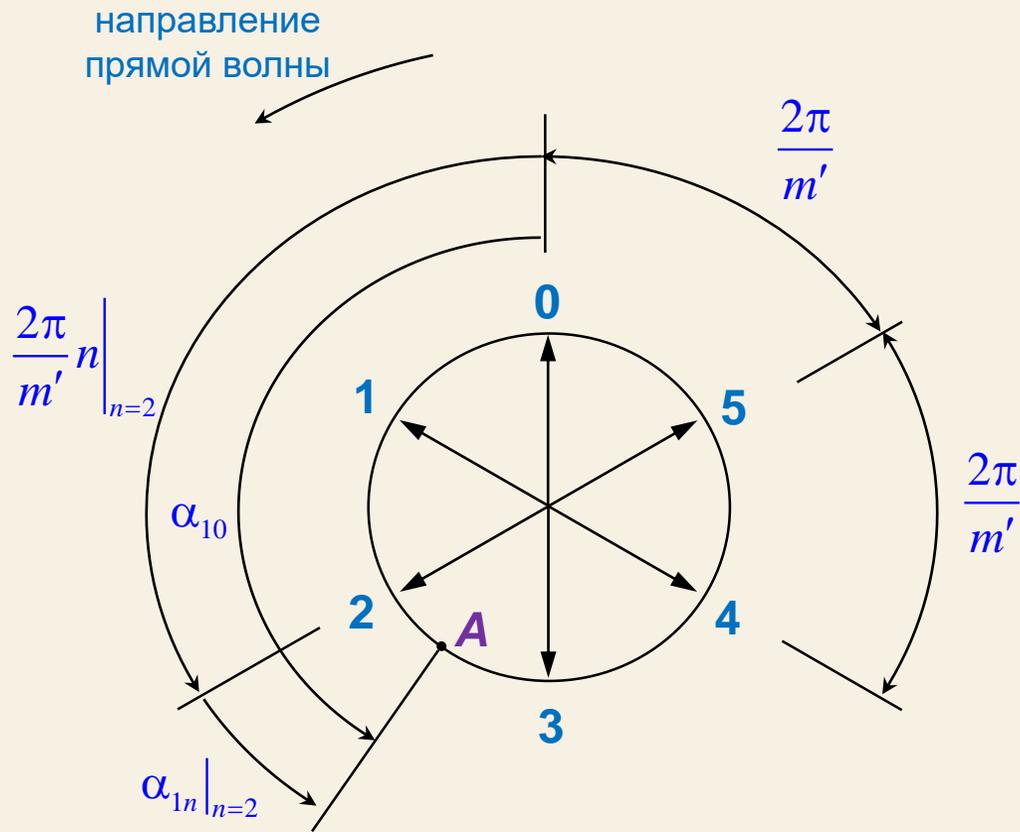
Для каждой фазы n известны вращающиеся волны гармоник МДС (и поля) в системе координат фазы n

$$F_{nv}^{вр} = \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos(\omega t_n - v p \alpha_n)$$

Надо просуммировать МДС всех фаз, но сначала приведя их к единой системе координат

Простая многофазная обмотка

Координаты в пространственной плоскости (относительно фазы 0)



Рассматриваем электрические углы (или $p = 1$)

Угловое положение точки A в системе координат фазы $n \rightarrow$ координата α_{1n} (пусть $n = 2$)

(первый индекс 1 – эл. угол по 1 гармонике, второй индекс n – номер фазы)

Угловое положение точки A в системе координат фазы 0 \rightarrow координата α_{10}

Угол между фазами 0 и n : $\frac{2\pi}{m'}n$

Приведем координату α_{1n} к системе координат фазы 0

$$\alpha_{1n} = \alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'}n$$

Простая многофазная обмотка

Координаты во временной плоскости (относительно фазы 0)

Обеспечим правильное чередование фаз для прямой волны
(относительно неподвижной оси времени t)

Мгновенное значение фазного тока

→ проекция вектора фазного тока на ось времени t

$$i_n = \sqrt{2}I \cos \omega t_n$$

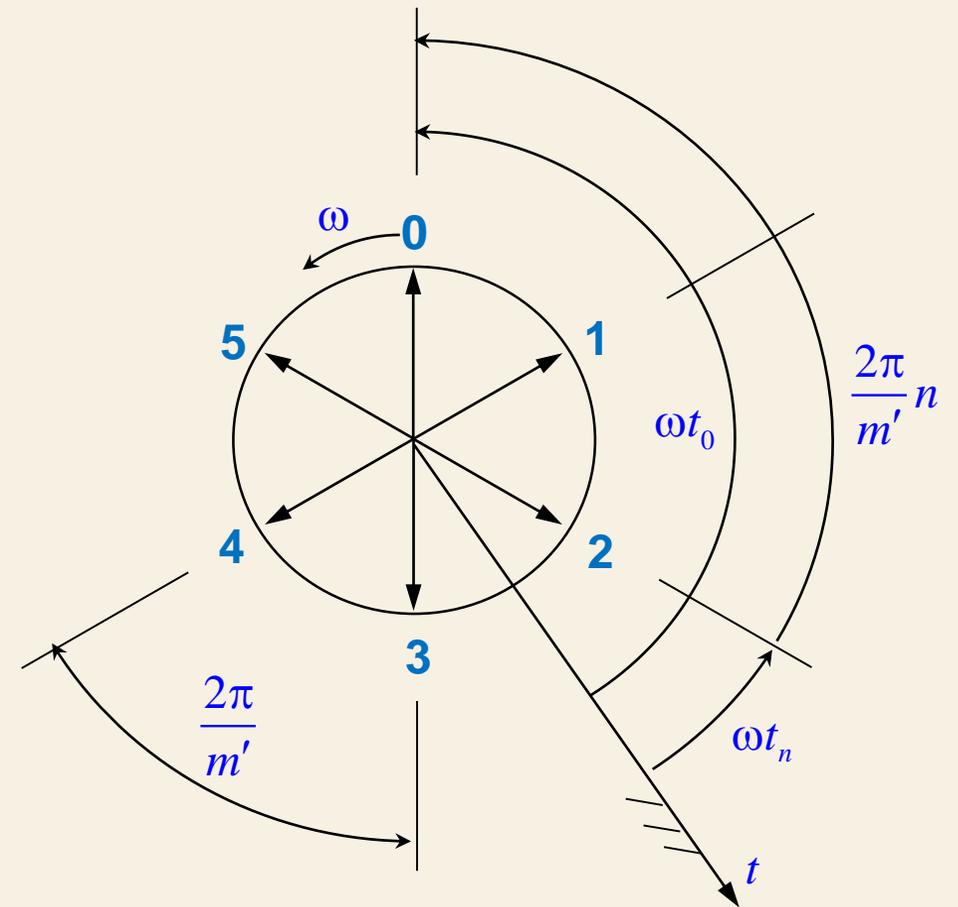
здесь t_n – временная координата фазы n

Фаза тока n в системе координат фазы n → ωt_n
(относительно момента времени, когда ток фазы n максимален)

Фаза тока 0 в системе координат фазы 0 → ωt_0
(относительно момента времени, когда ток фазы 0 максимален)

Приведем фазу тока n к системе координат фазы 0

$$\omega t_n = \omega t_0 - \frac{2\pi}{m'} n$$



Простая многофазная обмотка

Приведем гармоники каждой фазы n к системе координат фазы 0

$$F_{nv}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos(\omega t_n - \nu \alpha_{1n})$$

$$F_{nv}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos\left(\left(\omega t_0 - \frac{2\pi}{m'} n\right) - \nu \left(\alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n\right)\right)$$

Найдем полную МДС всей обмотки по ν гармонике как сумму ν гармоник МДС всех фаз

$$\begin{aligned} F_{\nu} &= \sum_{n=0}^{m'-1} F_{nv}^{\text{BP}} = \sum_{n=0}^{m'-1} \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos\left(\left(\omega t_0 - \frac{2\pi}{m'} n\right) - \nu \left(\alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} F_{\phi vm} \sum_{n=0}^{m'-1} \cos\left(\omega t_0 - \nu \alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n(1 - \nu)\right) \end{aligned}$$

Или в комплексной форме
– векторная сумма $\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{nvm}^{\text{BP}}$

Для разных гармоник ν аргументы \cos оказываются разными за счет слагаемого $\frac{2\pi}{m'} n(1 - \nu)$
Рассмотрим возможные варианты значений этого слагаемого и его влияния на \cos

Простая многофазная обмотка

Вариант 1: пусть ν таково, что $\frac{2\pi}{m'} n(1-\nu) = 2\pi \times (\text{целое число})$

$$\text{Т.е. } \frac{(1-\nu)}{m'} = (\text{целое число}) \quad \text{или} \quad \nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$$

Тогда в силу периодичности \cos : $\cos\left(\omega t_0 - \nu\alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n(1-\nu)\right) = \cos(\omega t_0 - \nu\alpha_{10})$ Это справедливо для любой фазы n

Т.е. все такие ν гармоники всех фаз совпадают в пространстве и вектор ν гармоники МДС простой многофазной обмотки равен простой сумме векторов ν гармоник МДС всех фаз

Результирующая МДС обмотки $F_\nu = m' F_{0\nu}^{\text{вр}} = m' \frac{F_{\phi\nu m}}{2} \cos(\omega t_0 - \nu\alpha_{10}) = F_{\nu m} \cos(\omega t - \nu\alpha_1)$ где $F_{\nu m} = \frac{\sqrt{2} m' I w' k_{y\nu} k_{p\nu}}{\nu \pi r}$

Например, для обмотки с $m' = 6$ для всех $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$ (т.е. $\nu = 1; -5; +7; -11; +13\dots$)

$$\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{n\nu m}^{\text{вр}} = 6 \cdot \dot{F}_{0\nu m}^{\text{вр}}$$

$$\begin{array}{c} \dot{F}_{0\nu m}^{\text{вр}} \quad \dot{F}_{1\nu m}^{\text{вр}} \\ \dot{F}_{5\nu m}^{\text{вр}} \quad \uparrow \quad \dot{F}_{2\nu m}^{\text{вр}} \\ \dot{F}_{4\nu m}^{\text{вр}} \quad \dot{F}_{3\nu m}^{\text{вр}} \end{array}$$

Аналогично, для КЗ обмотки ротора с 13 стержнями ($z = 13, m' = 13$) для всех $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$ (т.е. $\nu = 1; -12; +14; -25; +27\dots$)

$$\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{n\nu m}^{\text{вр}} = 13 \cdot \dot{F}_{0\nu m}^{\text{вр}}$$

Простая многофазная обмотка

Вариант 2: пусть ν таково, что $\frac{2\pi}{m'} n(1-\nu) \neq 2\pi \times (\text{целое число})$ Т.е. $\nu \neq 1 + m' \times (\text{целое число})$

Тогда векторы МДС соседних фаз n и $n+1$ расположены под углом

$$\alpha_{nn+1\nu} = \frac{2\pi}{m'} (n+1)(1-\nu) - \frac{2\pi}{m'} n(1-\nu) = \frac{2\pi}{m'} (1-\nu)$$

(одинаковый угол между любыми парами соседних фаз)

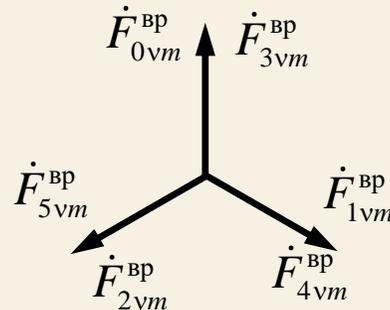
Этот угол кратен углу сдвига между фазами и векторы ν гармоник МДС всех фаз образуют симметричную звезду векторов

Сумма векторов которой всегда равна 0

Например, для обмотки с $m' = 6$

$\nu \neq 1 + m' \times (\text{целое число})$ соответствует $\nu = -1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; -7; \pm 8 \dots$

для $\nu = -1$ $\alpha_{nn+1\nu} = \frac{2\pi}{3}$



при этом $\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{n\nu m}^{BP} = 0$

Т.е. гармоники порядка $\nu \neq 1 + m' \times (\text{целое число})$ простой многофазной обмоткой не создаются!

Простая многофазная обмотка

Итак, простая многофазная обмотка создает гармоники МДС $F_v = F_{vm} \cos(\omega t - \nu p \alpha)$

порядка $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$

где амплитуда ν гармоники результирующей МДС $F_{vm} = \frac{\sqrt{2} m' I w' k_{yv} k_{pv}}{\nu p r}$

Эти гармоники вращаются с угловой скоростью $\Omega_\nu = \frac{\omega}{\nu p}$
(направление вращения определяется знаком ν)

Каждая гармоника МДС создает соответствующую гармонику индукции результирующего магнитного поля

$$B_\nu = B_{\nu m} \cos(\omega t - \nu p \alpha)$$

где амплитуда ν гармоники индукции $B_{\nu m} = \frac{\mu_0 F_{\nu m} C_\nu}{\delta}$

Полная МДС простой обмотки $F = \sum_\nu F_\nu$

Кривая индукции результирующего поля $B = \sum_\nu B_\nu$

Сложная многофазная обмотка

Сложная многофазная обмотка имеет на каждом периоде по две катушечные группы, соединенные встречно

Сложная многофазная обмотка с числом фаз m может быть представлена *эквивалентной* простой обмоткой с числом фаз $m' = 2m$, имеющей такие же катушки: $q' = q, w'_k = w_k, p' = p, a' = a, y' = y$

Если распределение токов по пазам одинаково, то и результирующая МДС и поле одинаковы

Например, сложная обмотка с $m = 3, q = 2$ и $p = 1$

Число зубцов на периоде $z = 2pmq = 12$

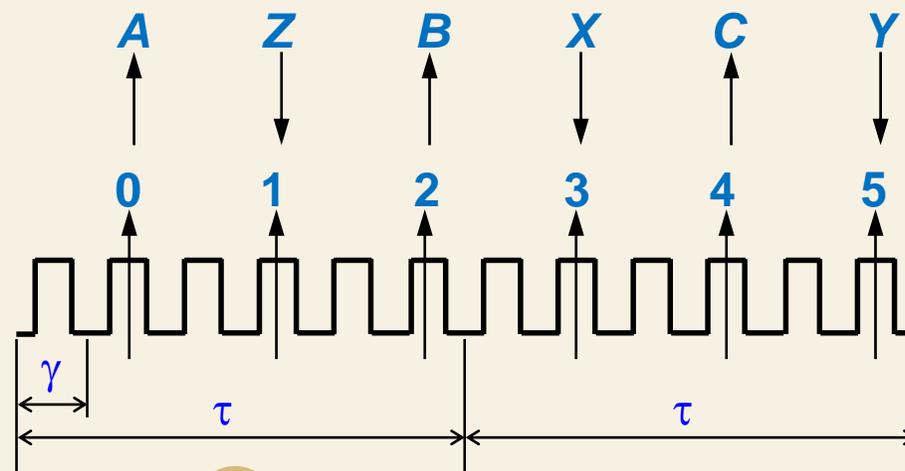
Полусное деление $\tau = z / 2p = 6$

Угловой размер зубцового деления

$$\gamma = \frac{2\pi}{z}$$

Угол сдвига между соседними фазами

$$\gamma_{nn+1} = \frac{2\pi}{pm} = \frac{2\pi}{3}$$



Катушечные группы сложной обмотки

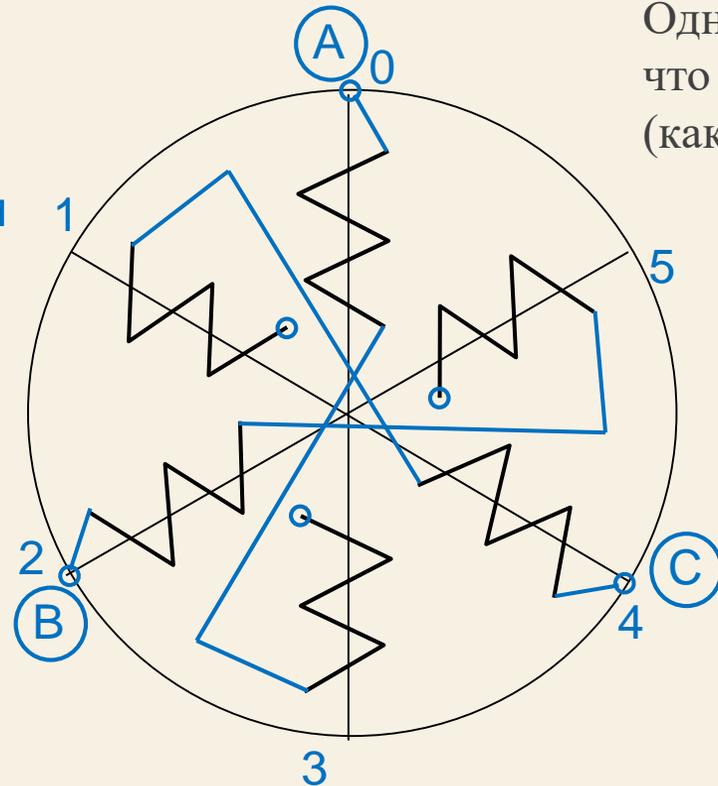
Фазы эквивалентной простой обмотки

Катушечные группы совпадают

Сложная многофазная обмотка

Фаза сложной обмотки (две катушечные группы, включенные встречно) образована из двух фаз эквивалентной простой обмотки (по одной катушечной группе в каждой), смещенных на π

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0 + 3 \\ B &\rightarrow 2 + 5 \\ C &\rightarrow 4 + 7 \end{aligned}$$



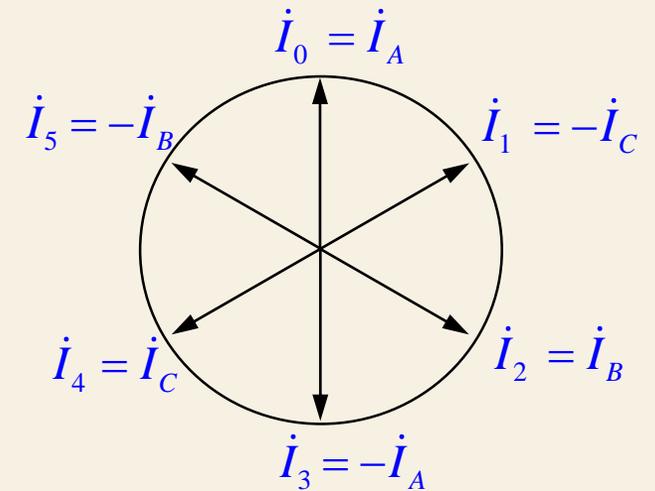
пространственная плоскость

Одна из фаз эквивалентной простой обмотки питается тем же током, что и фаза сложной обмотки, а другая – током, смещенным на π (как и во встречно включенной катушечной группе)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0 + 3 \\ B &\rightarrow 2 + 5 \\ C &\rightarrow 4 + 7 \end{aligned}$$

Число последовательно соединенных витков в фазе

$$w = \frac{2pqw_k}{a} \quad w' = \frac{p'q'w'_k}{a'} = \frac{w}{2}$$



временная плоскость

Сложная многофазная обмотка

Если для сложной обмотки существует эквивалентная простая, то сложная обмотка создает такие же гармоники МДС и поля, что и эквивалентная простая обмотка

$$F_v \Big|_{\text{сложная}} = F_v \Big|_{\text{простая}} = F_{vm} \cos(\omega t - \nu p \alpha)$$

где амплитуда МДС $F_{vm} = \frac{\sqrt{2} m' I w' k_{yv} k_{pv}}{\nu \pi p} \quad \left[\begin{array}{l} m' = 2m \\ w' = w / 2 \end{array} \right] \quad F_{vm} = \frac{\sqrt{2} m I w k_{yv} k_{pv}}{\nu \pi p}$

Гармонический состав сложной обмотки

$$\nu = 1 + m' \times (\text{целое число}) \rightarrow \nu = 1 + 2m \times (\text{целое число})$$

Сложная обмотка создает только нечетные гармоники!

Например, гармоники сложной обмотки с $m = 3$ $\nu = 1; -5; +7; -11; +13 \dots$

гармоники сложной обмотки с $m = 2$ $\nu = 1; -3; +5; -7; +9 \dots$

гармоники простой обмотки с $m' = 3$ $\nu = 1; -2; +4; -5; +7 \dots$

Классификация высших гармонических

Обмоточные коэффициенты различаются для разных ν
– порядок гармоники входит в формулу $k_{y\nu}$ и $k_{p\nu}$

Существует закономерность в значениях обмоточных коэффициентов для разных ν

Представим номер гармоники $\nu = 1 + 2m \times (\text{целое число})$ в виде $\nu = 1 + 2m(j + qs)$

где $j = 0; 1; 2 \dots q-1$, s – целое число $(0; \pm 1; \pm 2 \dots \pm \infty)$

Тогда коэффициент укорочения

$$k_{y\nu} = \sin \frac{\nu \pi y}{2\tau} = \sin \frac{\nu \pi y}{2mq} = \sin \frac{(1 + 2mj + 2mqs) \pi y}{2mq} = \sin \frac{(1 + 2mj) \pi y + 2mqs \pi y}{2mq} = \sin \frac{(1 + 2mj) \pi y}{2mq} \quad (\text{по модулю})$$

Аналогично, коэффициент распределения

$$k_{p\nu} = \frac{\sin \frac{\nu \pi}{2m}}{q \sin \frac{\nu \pi}{2mq}} = \frac{\sin \frac{\pi(1 + 2mj + 2mqs)}{2m}}{q \sin \frac{\pi(1 + 2mj + 2mqs)}{2mq}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{q \sin \frac{\pi(1 + 2mj)}{2mq}} \quad (\text{по модулю})$$

т.к. $\frac{2mqs \cdot \pi y}{2mq}$ равно целому числу π

Обмоточные коэффициенты
не зависят от s ,
но различаются для разных j

Классификация высших гармонических

С учетом значений обмоточных коэффициентов различают первоначальные и сопутствующие гармоники

Первоначальные гармоники – гармоники порядка $v_{j0} = 1 + 2mj$, где $j = 0; 1; 2 \dots q-1, s = 0$

Например, для обмотки с
 $m = 3, q = 3, y = 7$

j	v_{j0}	$k_{ov} = k_{yv} \cdot k_{pv}$
0	$v_{00} = 1 + 6 \cdot 0 = 1$	$k_{o1} = 0,92$
1	$v_{10} = 1 + 6 \cdot 1 = 7$	$k_{o7} = 0,138$
2	$v_{20} = 1 + 6 \cdot 2 = 13$	$k_{o13} = 0,039$

Первоначальные гармоники могут иметь разные обмоточные коэффициенты

Сопутствующие гармоники – гармоники порядка $v_{js} = v_{j0} + 2mqs$, где $s = \pm 1; \pm 2 \dots \pm \infty$

для обмотки с
 $m = 3, q = 3, y = 7$

j	v_{j0}	k_{ov}	Сопутствующие гармоники
0	$v_{00} = 1$	$k_{o1} = 0,92$	-17 +19 -35 +37 ...
1	$v_{10} = 7$	$k_{o7} = 0,138$	-11 +25 -29 +43 ...
2	$v_{20} = 13$	$k_{o13} = 0,039$	-5 +31 -23 +49 ...

Сопутствующие гармоники имеют такие же обмоточные коэффициенты, как и гармоника, которой они сопутствуют

Зубцовые гармоники

Высшие гармоники, сопутствующие основной гармонике
– **зубцовые** гармоники: $v_z = v_{0s}$, где $j = 0$, $s = \pm 1; \pm 2 \dots \pm \infty$

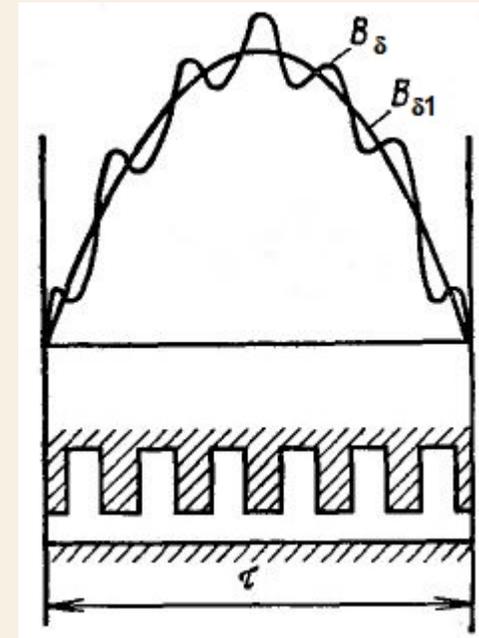
Название «зубцовые» связано с зубчатостью ЭМ

Число пар полюсов зубцовой гармоники: $p_z = p v_z = p(1 + 2mq_s) = p + 2pmq \cdot s = p + z \cdot s$

Зубцовые гармоники имеют такой же большой обмоточный коэффициент, что и основная гармоника

Именно они вносят заметные искажения в синусоидальную МДС обмотки
→ их необходимо учитывать в расчетах

Особенно это актуально для ЭМ с малыми q
– чем меньше v_z , тем больше амплитуда МДС F_{vz}



Подавление высших гармонических поля

Высшие гармонические ухудшают форму поля (→ моменты от высших ν , ЭДС от высших ν)

Укорочение шага обмотки

Для высших гармонических быстро уменьшается $k_{y\nu} = \sin \frac{\nu\pi\beta}{2} = \sin \frac{\nu\pi y}{2\tau}$

При укорочении шага на τ/ν
пропадает ν гармоника

При $y = 4/5 \tau$

- $k_{y1} = 0,951; k_{y5} = 0; k_{y7} = 0,573$

При $y = 6/7 \tau$

- $k_{y1} = 0,975; k_{y5} = 0,433; k_{y7} = 0$

Рекомендуется выбирать $y = 0,83\tau$
(минимизация 5 и 7 гармоники)

При этом страдает и 1 гармоника!

Распределение обмотки по пазам

При увеличении q быстро уменьшается $k_{p\nu} = \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2m}}{q \sin \frac{\nu\pi}{2mq}}$

Рекомендуется выбирать $q > 3$

$k_{p\nu}$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$
$\nu = 1$	0,966	0,960	0,958	0,957	0,957
$\nu = 5$	0,259	0,217	0,205	0,200	0,197
$\nu = 7$	0,259	0,177	0,158	0,149	0,145

Подавление высших гармонических поля

Скос пазов позволяет подавлять зубцовые гармоники

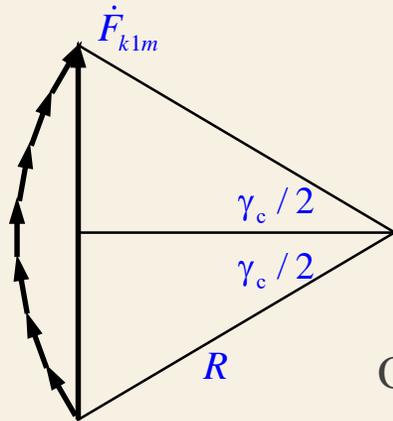
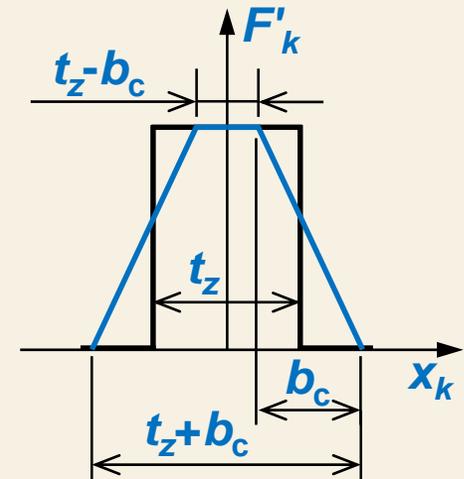
b_c – расстояние по окружности сердечника между началом и концом проводника

γ_{cv} – угол скоса по v гармонике

$$\gamma_{cv} = \frac{b_c \pi}{\tau_v} = \frac{b_c \pi v}{\tau}$$

В каждом поперечном сечении МДС зубцового контура остается прямоугольной с шириной t_z

но ее результирующее действие на всей длине сердечника эквивалентно трапецидальной форме МДС



Представив проводник суммой отрезков, сдвинутых в пространстве, получим формулу для гармоники результирующей МДС ЗК

$$F_{kvmc} = F_{kvm} k_{cv}$$

где коэффициент скоса $k_{cv} = \frac{\sin(\gamma_{cv} / 2)}{\gamma_{cv} / 2} = \frac{\sin(v\pi b_c / 2\tau)}{v\pi b_c / 2\tau}$

Обычно выполняют скос на 1 зубцовое деление

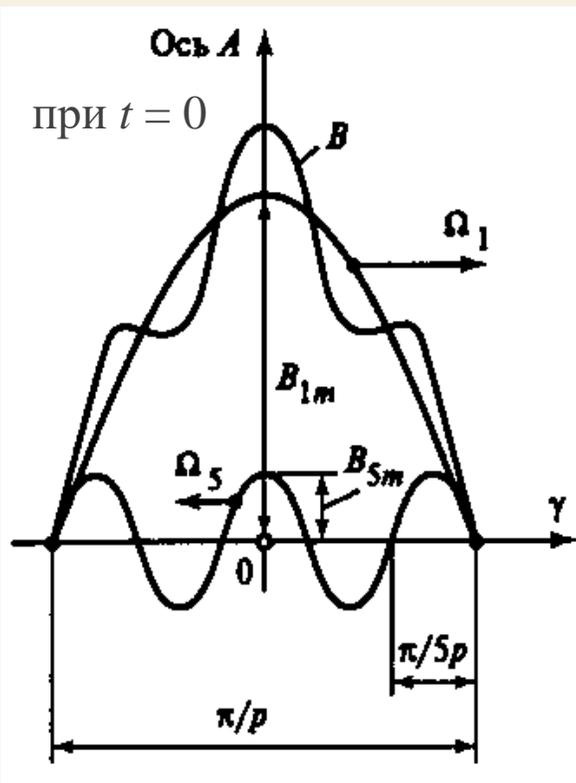
Например, для обмотки с $m = 3, q = 3, y = 7$ при $b_c = t_{z1}$

$$\gamma_c = \frac{v\pi b_c}{\tau} = \frac{v\pi \cdot 1}{mq} \quad k_{cv} = \frac{\sin(v\pi / 2mq)}{v\pi / 2mq}$$

для $v = 1$ $k_c = 0,995$
 для $v = -17$ $k_c = 0,058$
 для $v = 19$ $k_c = 0,057$

Магнитное поле обмотки якоря

Результирующее магнитное поле в зазоре, созданное \sin токами якоря, не только движется, но и изменяет свою форму с течением времени



Это видно и на гармониках

Гармоники поля вращаются с разными геометрическими угловыми скоростями $\Omega_v = \frac{\omega}{p_v} = \frac{\Omega_1}{v}$

Но одинаковыми электрическими $\omega_v = \Omega_v p_v = \omega$

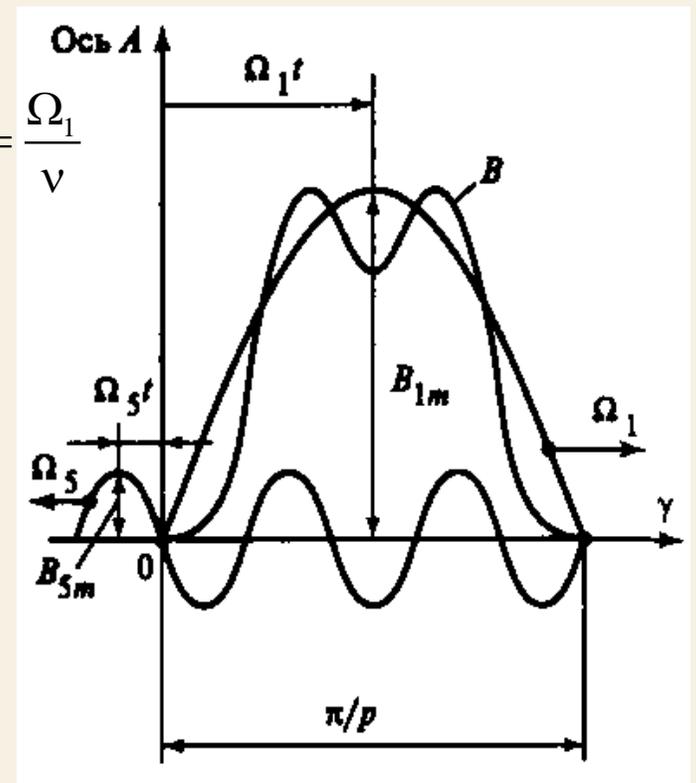
Пусть $B = B_1 + B_5$

При $t = \pi / 2\omega$

волна B_1 сдвинется на угол $\Omega_1 t = \frac{\omega}{p} \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2p}$

А волна B_5 сдвинется на $\Omega_5 t = \frac{\omega}{5p} \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(5p)}$

Форма результирующей B изменится



Магнитное поле обмотки возбуждения

Обмотки возбуждения питаются постоянным током и создают постоянное магнитное поле

Обмотки вращаются вместе с ротором и так же вращается поле возбуждения

Порядок рассмотрения МДС и индукции поля ОВ

аналогичен обмоткам переменного тока: катушки с $iw_k \rightarrow$ волна МДС \rightarrow гармоники МДС \rightarrow гармоники поля

Поле возбуждения явнополюсной СМ – сложная форма поля даже при гладком якоре (можно рассчитать только численно)

Инженерный подход – аналогично методике Т.Г. Сорокера:

Расчет гармоник реальной индукции

через гармоники идеализированной кривой $B(x)$

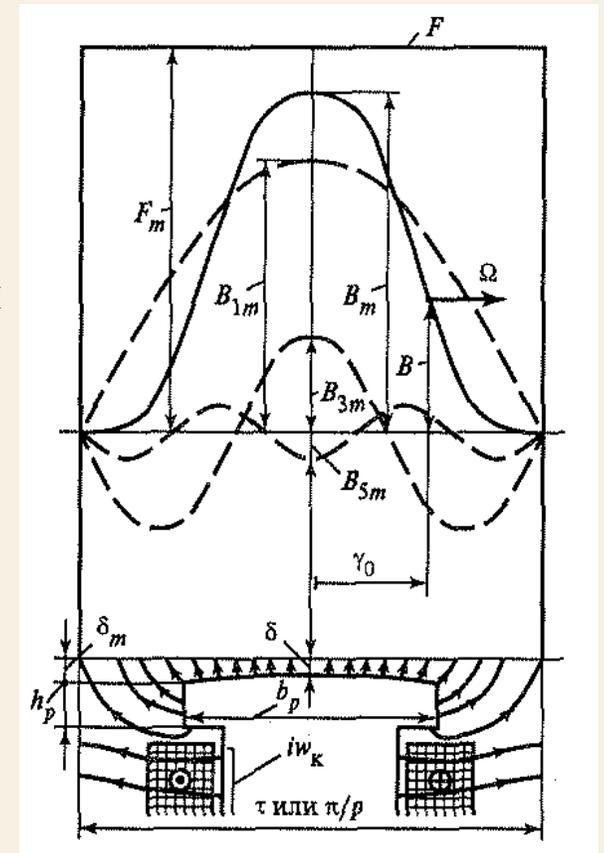
и коэффициенты поля возбуждения k_{fv}

(из таблиц в зависимости от $\alpha = b_p / \tau$, $\gamma = \delta_m / \delta$, $\varepsilon = \delta / \tau$)

$$\text{Затем } B(\gamma_0) = \sum_v B_{vm} \cos(\gamma_{0v})$$

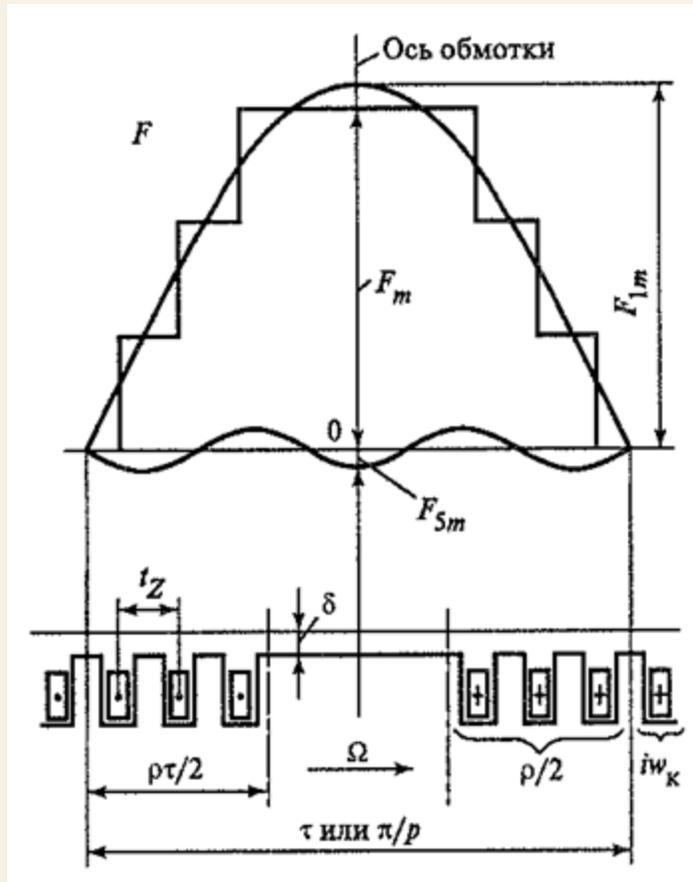
$$B_{vm} = k_{fv} B_m$$

$$\text{где } B_m = \frac{\mu_0 F_m}{\delta}$$



Магнитное поле обмотки возбуждения

В случае неявнополюсной СМ – обычный гармонический анализ



Катушки с $w_k \rightarrow$ ступенчатая волна МДС F

\rightarrow гармоники МДС с амплитудой

$$F_{vm} = \frac{2qk_{pv}}{\pi v} (i w_k)$$

или так $F_{vm} = \frac{4k_{pv}}{\pi v} (i w)$ где $w = \frac{w_k q}{2}$ – число витков ОВ (на полюс)

Коэффициент распределения $k_{pv} = \frac{\sin \frac{qv\gamma_z}{2}}{q \sin \frac{v\gamma_z}{2}}$

$\gamma_z = \frac{\pi t_z}{\tau}$ – угловой размер зубцового деления

При равномерном зазоре гармоники индукции находят по гармоникам МДС

$$B_{vm} = \frac{\mu_0 F_{vm}}{\delta}$$

Магнитное поле обмотки возбуждения

Особенность гармоник поля возбуждения

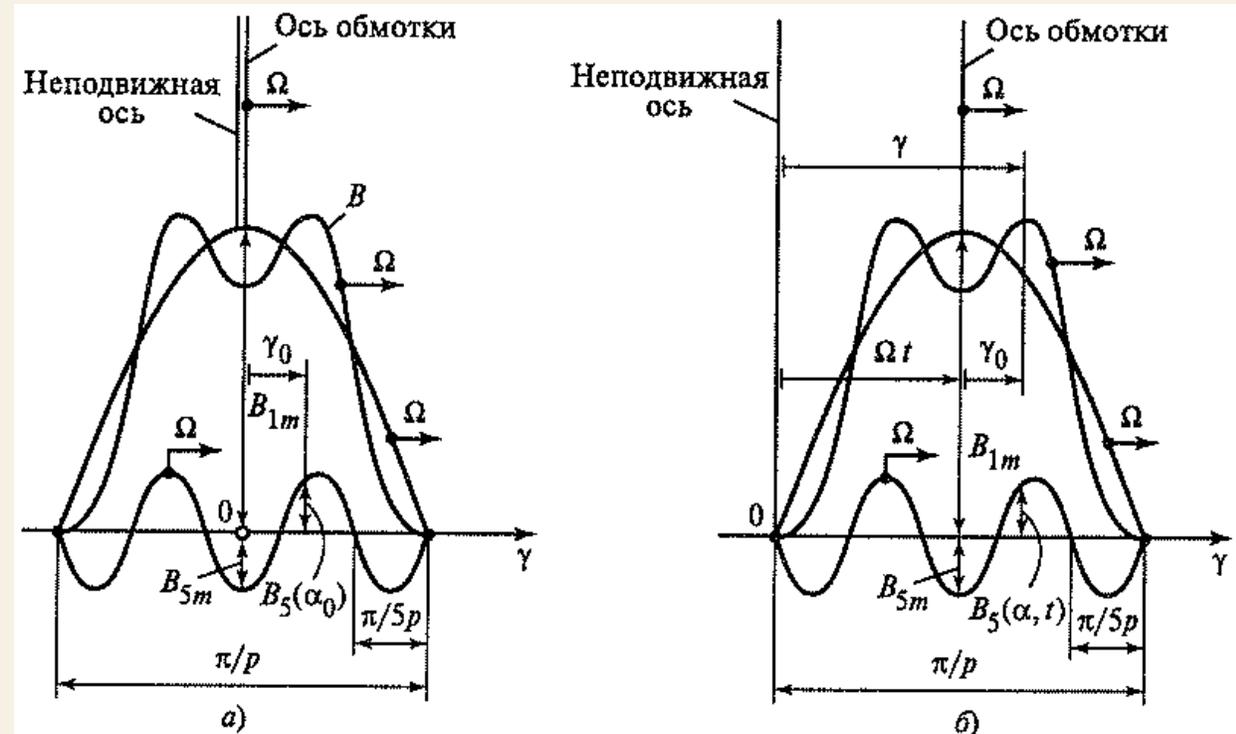
– все гармоники вращаются со скоростью вращения ротора
(форма поля возбуждения не изменяется)

$$\Omega_v = \Omega$$

Но электрические скорости гармоник поля возбуждения оказываются различны

$$\omega_v = \Omega_v p_v = v\Omega$$

(чем больше v , тем выше скорость перемещения гармоники поля на периоде обмотки)



Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Вращающееся поле создает переменное потокосцепление с обмоткой и наводит в ней ЭДС

Используя гармонические функции легко найти ЭДС

Рассмотрим волну основной гармоники индукции $B = B_1$

Ось катушки w_k с шагом y_k расположена в точке x_k

(в угловых величинах $\gamma_k = x_k / R$, $\gamma_y = y_k / R$)

Волна индукции B перемещается со скоростью Ω

и в момент времени t находится в точке $\Omega \cdot t$

Поток, сцепленный с каждым витком катушки,

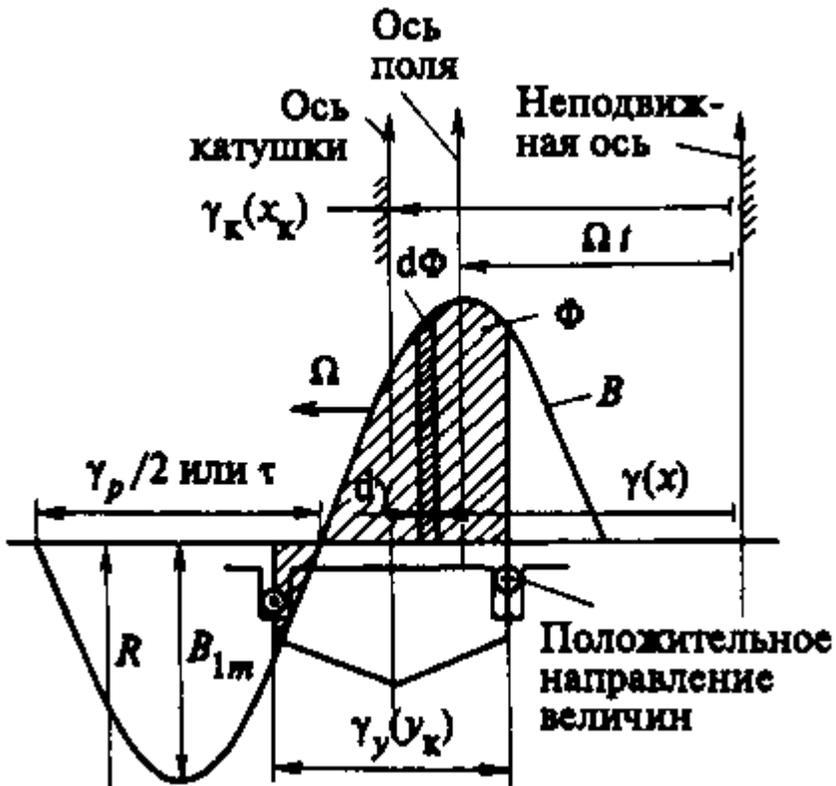
$$\Phi = \int_{S_y} B dS = \int_{S_y} d\Phi \quad \text{где } S_y = y_k l_\delta - \text{площадь катушки}$$

Элементарный поток $d\Phi$,

сцепленный с элементом катушки $dS = l_\delta dx = l_\delta R d\gamma$,

может быть найден как $d\Phi = B dS = B l_\delta R d\gamma$

на всей ширине катушки от $\gamma_k^{\text{II}} = \gamma_k - \gamma_y / 2$ до $\gamma_k^{\text{I}} = \gamma_k + \gamma_y / 2$



Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Считая, что поле по длине l_δ однородно, найдем весь поток, сцепленный с витком катушки

$$\Phi = \int_{S_y} d\Phi = \int_{\gamma_k^{\text{II}}}^{\gamma_k^{\text{I}}} B l_\delta R d\gamma = l_\delta R \int_{\gamma_k^{\text{II}}}^{\gamma_k^{\text{I}}} B_{1m} \cos(\omega t - p\gamma) d\gamma$$

$$= \frac{B_{1m} l_\delta R}{p} \sin(\omega t - p\gamma) \Big|_{\gamma_k^{\text{II}}}^{\gamma_k^{\text{I}}}$$

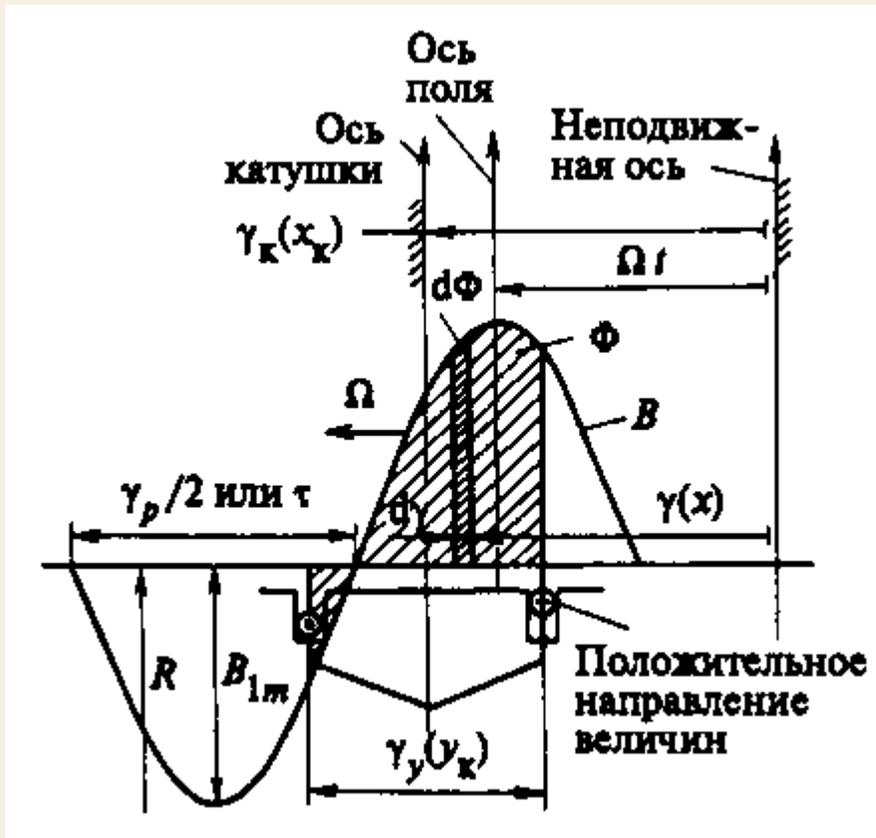
После подстановки пределов интегрирования и преобразования синусов суммы и разности углов получим

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{1m} \sin \frac{\pi y_k}{2\tau} \cos(\omega t - p\gamma_k) \quad \text{или} \quad \Phi = \Phi_m k_y \cos(\omega t - \alpha_k)$$

Здесь $\Phi_m = \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{1m}$ – максимальный поток, сцепленный с катушкой без укорочения шага

$k_y = \sin \frac{\pi y_k}{2\tau}$ – коэффициент укорочения катушки

$\alpha_k = p\gamma_k$ – электрический угол положения оси катушки



Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Потокосцепление вращающейся волны поля с катушкой, имеющей число витков w_k

$$\Psi = w_k \Phi = w_k k_y \Phi_m \cos(\omega t - \alpha_k) \quad (\text{мгновенное значение})$$

ЭДС, наведенная в катушке изменяющимся потоком

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = \omega w_k k_y \Phi_m \sin(\omega t - \alpha_k) \quad \text{или} \quad e = \sqrt{2} E_k \sin(\omega t - \alpha_k)$$

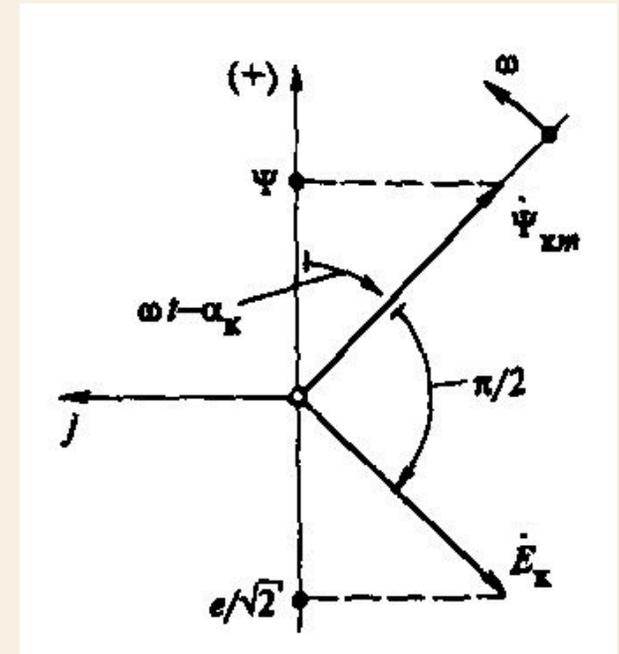
E_k – действующее значение ЭДС катушки $E_k = \frac{\omega}{\sqrt{2}} w_k k_y \Phi_m = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f w_k k_y \Phi_m$

Потокосцепление и ЭДС удобно представить в виде комплексных функций

Мгновенные значения могут быть найдены как

$$\Psi = \operatorname{Re}(\dot{\Psi}_{km}) = \operatorname{Re}(\Psi_{km} e^{j(\omega t - \alpha_k)})$$
$$e = \operatorname{Re}(\dot{E}_k) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} E_k e^{j(\omega t - \alpha_k - \pi/2)})$$

Причем $\dot{E}_k = -j \frac{\omega}{\sqrt{2}} \dot{\Psi}_{km}$



Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Используя комплексные функции можно найти потокосцепление и ЭДС катушечной группы

$$\dot{\Psi}_{qm} = \sum_{i=1}^q \dot{\Psi}_{kmi} \quad \dot{E}_q = \sum_{i=1}^q \dot{E}_{ki} \quad \text{или} \quad \Psi_{qm} = q\Psi_{km}k_p = qw_k k_y k_p \Phi_m, \quad E_q = qE_k k_p \quad \text{Причем} \quad \dot{E}_q = -j \frac{\omega}{\sqrt{2}} \dot{\Psi}_{qm}$$

где k_p – коэффициент распределения

Фаза сложной обмотки содержит $2p$ катушечных групп, включенных встречно

Соседние группы смещены на τ

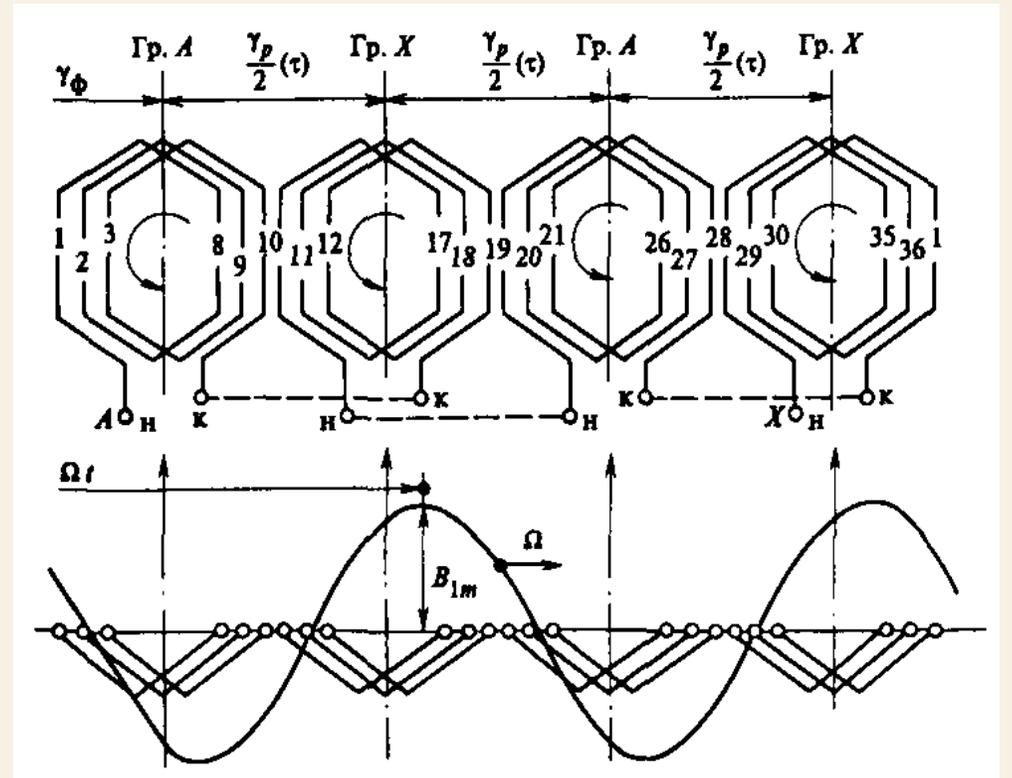
или на электрический угол половины периода $\frac{\alpha_p}{2} = \frac{p\gamma_p}{2} = \pi$

Поэтому Ψ и E обратных катушечных групп (X) находятся в противофазе с Ψ и E прямых катушечных групп (A)

В результате в пределах каждой параллельной ветви Ψ и E катушечных групп суммируются (алгебраически)

$$\Psi_{\phi m} = \frac{2p}{a} \Psi_{qm} = \frac{2pqw_k}{a} k_y k_p \Phi_m = wk_o \Phi_m$$

$$E_{\phi} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Psi_{\phi m} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} fwk_o \Phi_m$$

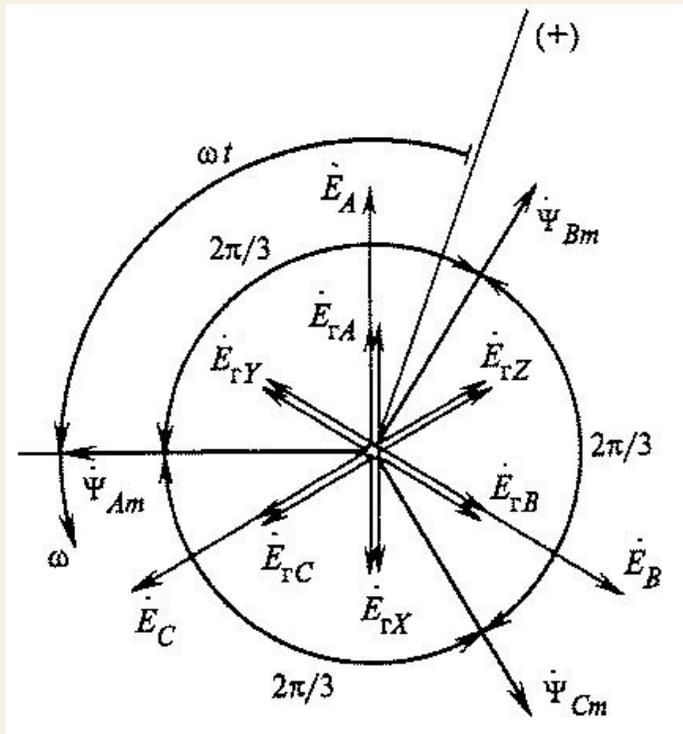


Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Все фазы одинаковы и сдвинуты в пространстве на угол $\gamma_{BA} = \frac{2\pi}{p\tau} = \frac{\gamma_p}{\tau}$ или эл.угол $\alpha_{BA} = p\gamma_{BA} = \frac{2\pi}{\tau}$

Величины векторов Ψ и ЭДС фаз одинаковы (Ψ_m, E_ϕ) и на временной плоскости образуют симметричную звезду

В трехфазной обмотке приняв фазу А за главную, запишем мгновенные значения

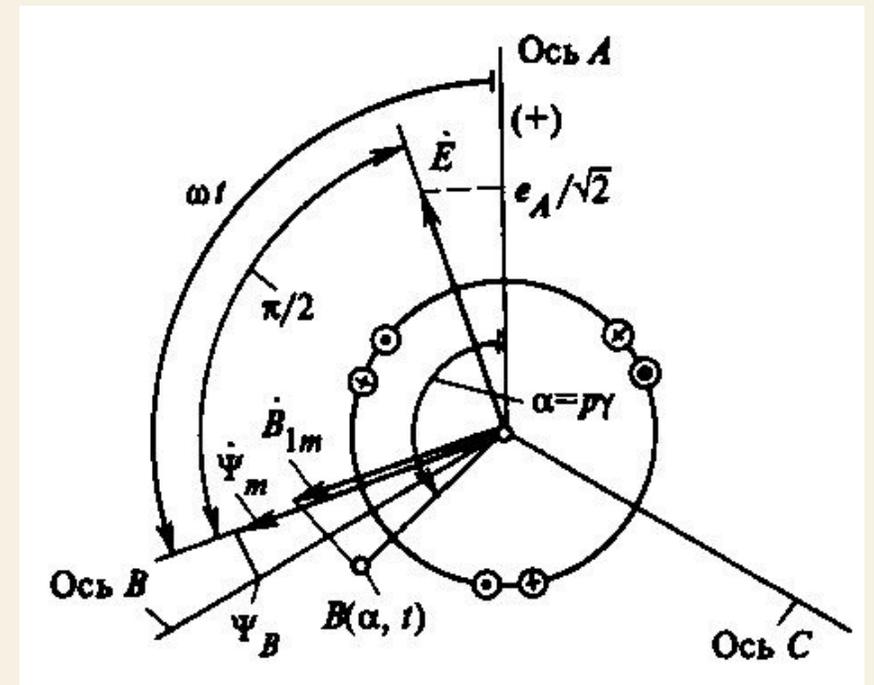


$$\begin{aligned}\Psi_A &= \Psi_m \cos(\omega t) \\ \Psi_B &= \Psi_m \cos(\omega t - \alpha_{BA}) \\ \Psi_C &= \Psi_m \cos(\omega t - \alpha_{CA})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_A &= \sqrt{2}E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ e_B &= \sqrt{2}E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \alpha_{BA}\right) \\ e_C &= \sqrt{2}E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \alpha_{CA}\right)\end{aligned}$$

Ψ и ЭДС на пространственной плоскости можно изображать едиными векторами

$$\dot{\Psi} = \Psi_m e^{j\omega t} \quad \dot{E} = \sqrt{2}E_\phi e^{j\omega t - \frac{\pi}{2}}$$



Потокосцепление и ЭДС от высших гармоник поля

Реальное магнитное поле – совокупность основной и высших гармонических

Подход к расчету высших гармонических Ψ и ЭДС аналогичен основной гармонике

Каждая ν гармоника поля – синусоидальная функция со своей амплитудой $B_{\nu m}$, полюсным делением $\tau_\nu = \tau / \nu$ угловой скоростью $\Omega_\nu = \Omega_1 / \nu$

Она образует с каждой фазой потокосцепление с амплитудой

$$\Psi_{\phi \nu m} = w k_{ov} \Phi_{\nu m} \quad \text{где} \quad k_{ov} = k_{yv} k_{pv} k_{cv} \quad \Phi_{\nu m} = \frac{2}{\pi} \tau_\nu l_\delta B_{\nu m}$$

Действующая ЭДС фазы, наведенная ν гармоникой поля

$$E_{\phi \nu} = \frac{\omega_\nu}{\sqrt{2}} \Psi_{\phi \nu m} = \frac{\omega_\nu}{\sqrt{2}} w k_{ov} \Phi_{\nu m} = \frac{2\omega_\nu}{\sqrt{2}\pi} w k_{ov} \tau_\nu l_\delta B_{\nu m}$$

Гармоники ЭДС накладываются на основную гармонику и влияют на результирующую ЭДС фазы и электромагнитный момент ($M_{эм} = P_{эм} / \Omega$, $P_{эм} = m E_\phi I_\phi$)

Характер влияния зависит от скорости гармоники

Потокоцепление и ЭДС от высших гармоник поля

1. ЭДС от пространственных гармоник многофазной обмотки переменного тока

Магнитное поле изменяет свою форму, т.к. содержит высшие гармоники, вращающиеся с разными угловыми скоростями

$$\Omega_v = \frac{\omega}{p_v} = \frac{\omega}{pv}$$

Однако их электрические скорости одинаковы $\omega_v = \Omega_v p_v = \frac{\Omega}{v} p v = \Omega p = \omega = 2\pi f$

Все такие v гармоники наводят в фазе ЭДС одинаковой частоты ω , совпадают по фазе с ЭДС от основной гармоники поля

→ могут складываться арифметически, изменяя амплитуду ЭДС

Результирующая ЭДС
остается синусоидальной

Суммарная ЭДС фазы от высших гармонических поля

$$E_{\text{сд}} = \sum_{v \neq 1} E_{\phi v} = 2\sqrt{2} f \omega \tau l_{\delta} \sum_{v \neq 1} \frac{k_{ov} B_{vm}}{v}$$

– ЭДС дифференциального рассеяния
(от 0,5% до 5% от $E_{\phi 1}$)

Не участвует в преобразовании энергии в ЭМ

Потокосцепление и ЭДС от высших гармоник поля

2. ЭДС от высших гармоник поля обмотки возбуждения

Магнитное поле ОВ неизменно, все гармоники вращаются с одинаковой скоростью $\Omega_v = \Omega$

При этом электрическая скорость наведенной гармоники ЭДС $\omega_v = \Omega_v p_v = \Omega p v = \omega v = 2\pi f v$

Каждая такая v гармоника наводит в фазе ЭДС временную гармонику, изменяющуюся с частотой $f_v = f v$

Оценить влияние v гармоники
можно так

$$\frac{E_{\phi v}}{E_{\phi 1}} = \frac{k_{ov} B_{vm}}{k_{1v} B_{1m}}$$

Под действием временных гармоник искажается форма ЭДС

Для оценки степени искажений

– коэффициент искажения синусоидальности

$$k_U = \frac{\sqrt{\sum_{v \neq 1} E_{vm}^2}}{E_{1m}} 100\%$$

(THD – суммарный коэффициент гармонических искажений)

Нормально допустимое значение в сети с $U_c = 0,38$ кВ – 8,0; в сети с $U_c = 6 \dots 20$ кВ – 5,0;

в сети с $U_c = 35$ кВ – 4,0; в сети с $U_c = 110 \dots 330$ кВ – 2,0

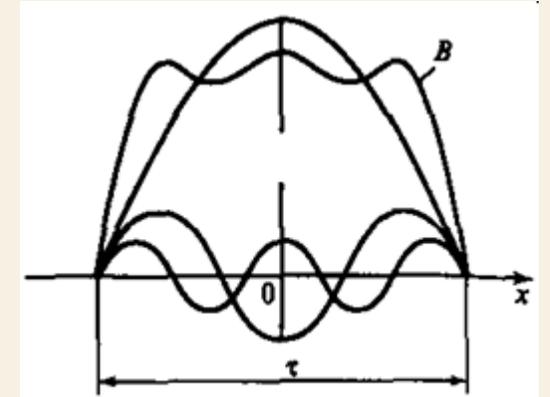
Потокосцепление и ЭДС от высших гармоник поля

2. ЭДС от высших гармоник поля обмотки возбуждения

Для минимизации гармонических искажений надо улучшать форму поля ОВ

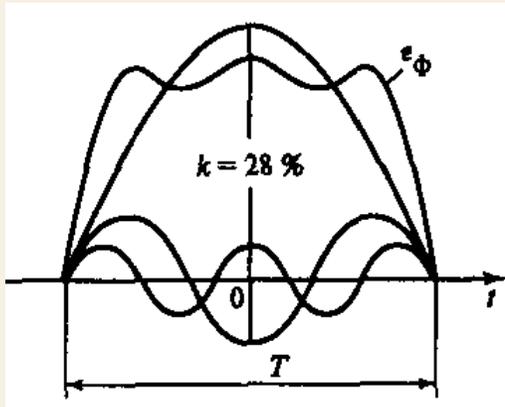
Но также важно правильно проектировать обмотку якоря

Пример, пусть ОВ создает кривую индукции B с 1, 3 и 5 гармониками

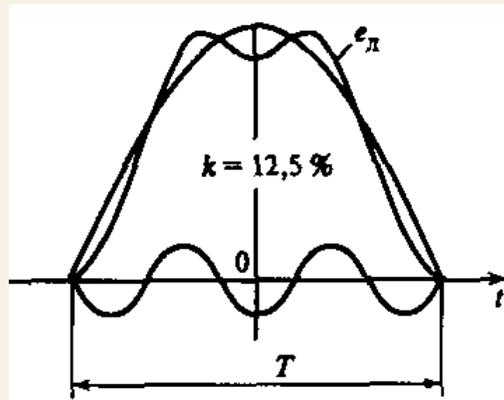


При сосредоточенной обмотке ($q = 1$)

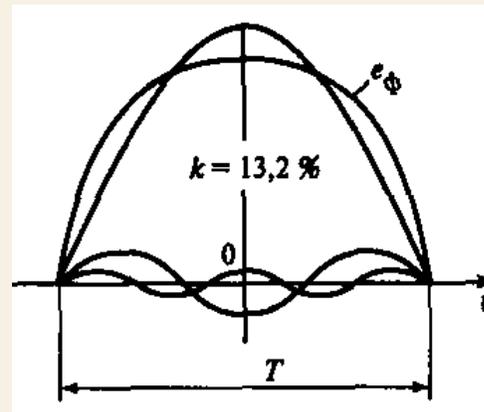
без укорочения ($y = \tau$) наводятся все гармоники ЭДС и $k_U = 28\%$



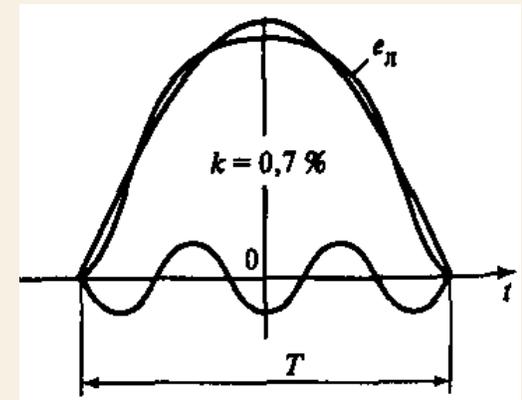
Если обмотка соединена в Y, в линейных ЭДС нет $v = 3$ и $k_U = 12,5\%$



Если выбрать $q = 2$ и $y = 0,83\tau$, то $k_o < 1$ и $k_U = 13,2\%$ для E_ϕ



А в линейной ЭДС при этом $k_U = 0,7\%$



Индуктивности многофазных обмоток

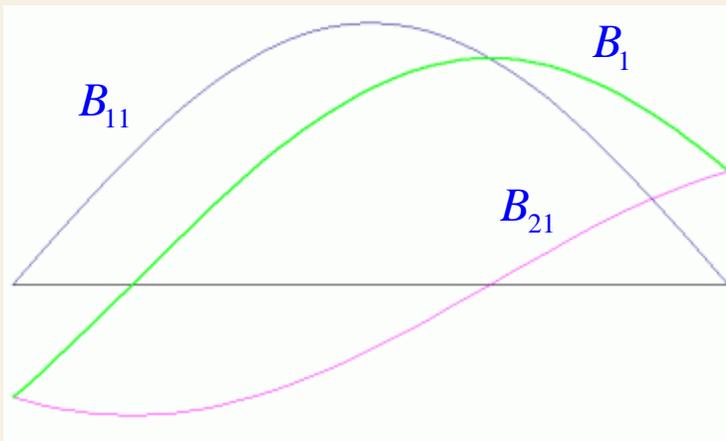
Система токов многофазной обмотки создает спектр гармоник поля в зазоре

Гармоники поля образуют потокосцепления с фазами обмотки

Коэффициент пропорциональности между током и потокосцеплением – **индуктивность** (при $\mu_{ст} = \text{Const}$)

Магнитное поле принято разделять на главное поле (взаимоиндукции) и поле рассеяния

Главное магнитное поле соответствует основной гармонике поля в зазоре B_1



Его тоже можно разделить на главное поле от токов статора

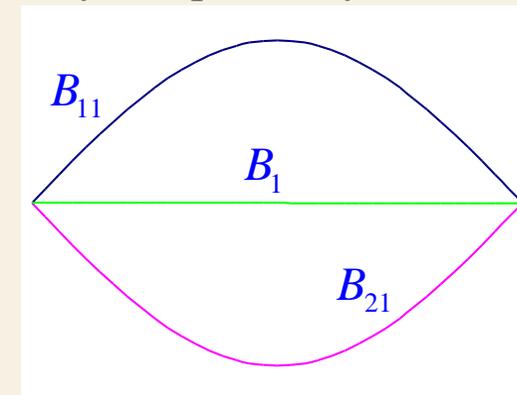
$$B_{11m} = \frac{\mu_0 F_{11m} C_{11}}{\delta''} \approx \frac{\mu_0 F_{11m}}{(\delta k_{\delta 2}) k_{\delta 1}}$$

и главное поле от токов ротора

$$B_{21m} = \frac{\mu_0 F_{21m} C_{21}}{\delta'} \approx \frac{\mu_0 F_{21m}}{(\delta k_{\delta 1}) k_{\delta 2}}$$

Магнитное поле рассеяния

образовано токами I_1, I_2 , не создающими основную гармонику поля в зазоре

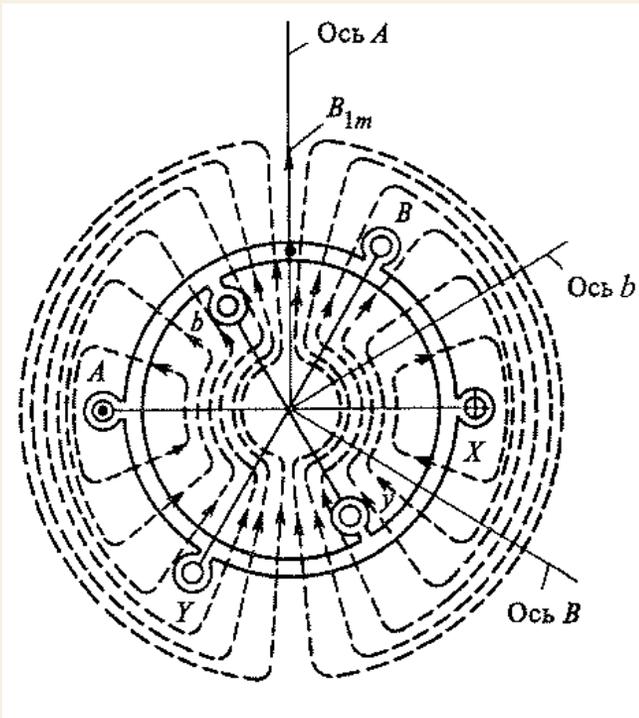


Главная индуктивность фазы

– определяется главным потоком сцеплением фазы от тока этой фазы

Пусть по фазе A протекает гармонический ток I_A

Амплитуда основной гармоники МДС фазы $F_{\phi 1m} = \frac{2\sqrt{2}I_A w_1 k_{o1}}{\pi p}$



Создает основную гармонику поля с $B_{11m} = \frac{\mu_0 F_{\phi 1m}}{\delta k_\delta} = \frac{2\sqrt{2}I_A w_1 k_{o1} \mu_0}{\pi p \delta k_\delta}$

Ее потокосцепление с фазой $\Psi_{AAm} = w_1 k_{o1} \Phi_m = w_1 k_{o1} \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{11m}$

Тогда отношение амплитуды потокосцепления к амплитуде тока

$$L_{AA} = \frac{\Psi_{AAm}}{\sqrt{2}I_A} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} (w_1 k_{o1})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta} \quad \text{– главная индуктивность фазы}$$

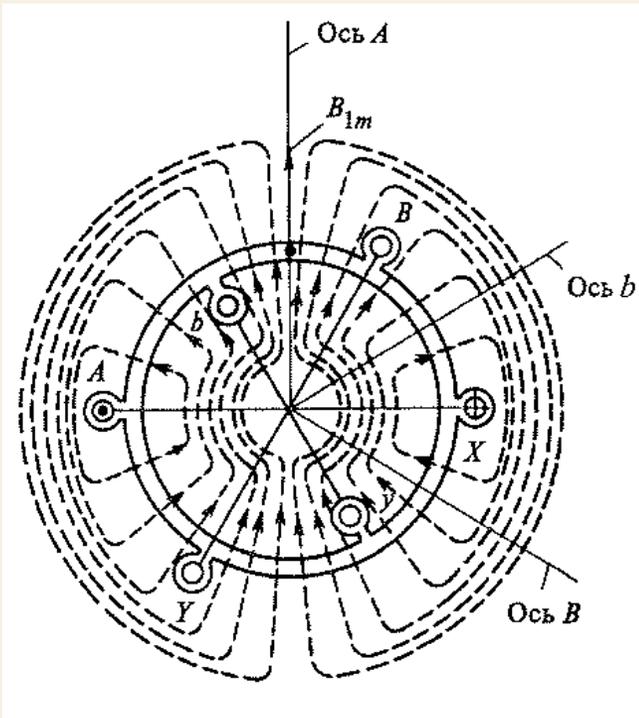
L_{AA} зависит от геометрии зазора (δ и τl_δ) и обмоточных данных ($w_1 k_{o1}$ и p)

L_{AA} не зависит от положения ротора (при гладком роторе)

Главная взаимная индуктивность между фазами

– определяется главным потоком сцеплением фазы от тока другой фазы

Потоком сцепление фазы с волной поля зависит от положения фазы относительно начала координат (относительно возбужденной фазы)



$$\Psi_{BAm} = w_1 k_{o1} \Phi_m \cos(\alpha_{BA}) = \Psi_{AAm} \cos(\alpha_{BA})$$

Тогда главная взаимная индуктивность между фазами

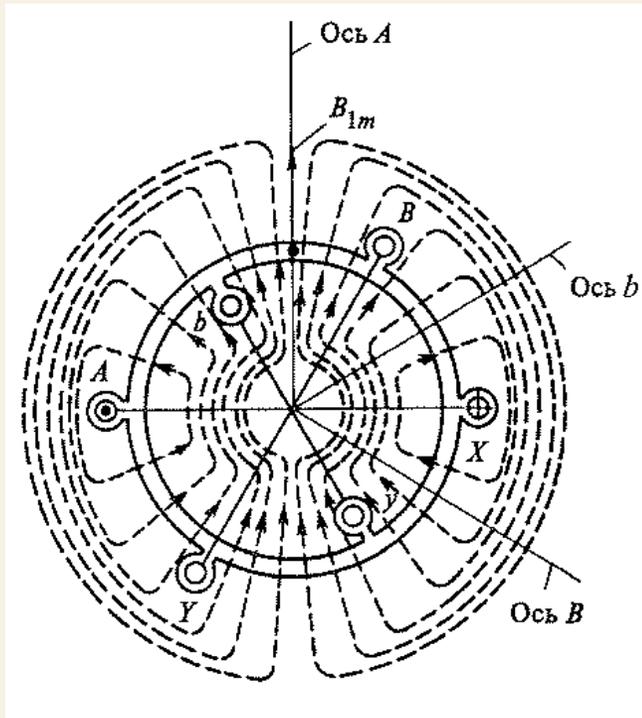
$$L_{BA} = \frac{\Psi_{BAm}}{\sqrt{2}I_A} = \frac{\Psi_{AAm} \cos(\alpha_{BA})}{\sqrt{2}I_A} = L_{AA} \cos(\alpha_{BA})$$

$$\text{Для 3-фазной обмотки} \quad \alpha_{BA} = \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{CA} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Тогда} \quad L_{BA} = L_{CA} = -\frac{1}{2}L_{AA}$$

Главная взаимная индуктивность между фазами первичной и вторичной обмоток

– определяется главным потокомсцеплением фазы от тока другой фазы
и также зависит от угла между осями фаз



Потокомсцепление фазы b с волной поля, созданного фазой A

$$\begin{aligned}\Psi_{bAm} &= w_2 k_{o2} \Phi_m \cos(\alpha_{bA}) \\ &= w_2 k_{o2} \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{11m} \cos(\alpha_{bA})\end{aligned}$$

где основная гармоника поля, созданная фазой A

$$B_{11m} = \frac{\mu_0 F_{\phi 1m}}{\delta k_\delta} = \frac{2\sqrt{2} I_A w_1 k_{o1} \mu_0}{\pi r \delta k_\delta}$$

Тогда главная взаимная индуктивность между фазами b и A

$$L_{bA} = \frac{\Psi_{bAm}}{\sqrt{2} I_A} = L_m \cos(\alpha_{bA})$$

где L_m – максимальная взаимная индуктивность (когда оси фаз совпадают)

$$L_m = \frac{4\mu_0}{r\pi^2} (w_1 k_{o1} w_2 k_{o2}) \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

При вращении ротора угол $\alpha_{bA} = p\Omega \cdot t$ постоянно возрастает, а индуктивность L_{bA} изменяется периодически

Главная индуктивность обмотки

– индуктивность фазы обмотки с учетом влияния всех остальных фаз этой обмотки

$$L_{11} = \frac{\operatorname{Re}(\dot{\Psi}_{Am})}{\operatorname{Re}(\dot{I}_{Am})} \quad \text{где для 3-фазной обмотки} \quad \dot{\Psi}_{Am} = \dot{I}_{Am}L_{AA} + \dot{I}_{Bm}L_{BA} + \dot{I}_{Cm}L_{CA}$$

1. Для токов прямой и обратной последовательности $\dot{I}_{Am} + \dot{I}_{Bm} + \dot{I}_{Cm} = 0$ или $\dot{I}_{Am} = -(\dot{I}_{Bm} + \dot{I}_{Cm})$
в 3-фазной обмотке

$$\text{кроме того} \quad L_{BA} = L_{CA} = -\frac{1}{2}L_{AA}$$

$$\text{Т.е.} \quad \dot{\Psi}_{Am} = \dot{I}_{Am}L_{AA} + L_{BA}(\dot{I}_{Bm} + \dot{I}_{Cm}) = \dot{I}_{Am}L_{AA} - \dot{I}_{Am}L_{BA} = \dot{I}_{Am}L_{AA} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Тогда главная индуктивность 3-фазной обмотки $L_{11} = \frac{3}{2}L_{AA} = \frac{6\mu_0}{p\pi^2} (w_1k_{o1})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$

$$\text{Главная индуктивность } m_1\text{-фазной обмотки} \quad L_{11} = \frac{m_1}{2}L_{AA} = \frac{2m_1\mu_0}{p\pi^2} (w_1k_{o1})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

2. Для токов нулевой последовательности $\dot{I}_{A0m} = \dot{I}_{B0m} = \dot{I}_{C0m}$ $\dot{\Psi}_{A0m} = \dot{I}_{A0m}(L_{AA} + L_{BA} + L_{CA})$
в 3-фазной обмотке

$$\text{и главная индуктивность обмотки} \quad L_{11(0)} = L_{AA} + L_{BA} + L_{CA} = L_{AA} - \frac{1}{2}L_{AA} - \frac{1}{2}L_{AA} = 0$$

Главная взаимная индуктивность между фазой первичной обмотки и всей вторичной обмоткой

– определяется потокосцеплением фазы А с полем, созданным всей вторичной обмоткой

Ток вторичной обмотки I_2 создает основную гармонику МДС вторичной обмотки

$$F_{21m} = \frac{m_2 \sqrt{2} I_2 w_2 k_{o2}}{\pi r}$$

Которая образует основную гармонику поля

$$B_{21m} = \frac{\mu_0 F_{21m}}{\delta k_\delta} = \frac{m_2 \sqrt{2} I_2 w_2 k_{o2} \mu_0}{\pi r \delta k_\delta}$$

Максимальное потокосцепление этого поля с фазой А (когда ось поля совпадает с осью фазы)

$$\Psi_{Am} = w_1 k_{o1} \Phi_m = \frac{2}{\pi} \tau l_\delta w_1 k_{o1} B_{21m}$$

Тогда главная взаимная индуктивность (ее максимальное значение)

$$L_{12m} = \frac{\Psi_{Am}}{\sqrt{2} I_2} = \frac{2 m_2 \mu_0}{r \pi^2} (w_1 k_{o1} w_2 k_{o2}) \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

Вспомним, что главная взаимная индуктивность между фазами первичной и вторичной обмоток

$$L_m = \frac{4 \mu_0}{r \pi^2} (w_1 k_{o1} w_2 k_{o2}) \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

При этом главная взаимная индуктивность между фазой и обмоткой

$$L_{12m} = \frac{m_2}{2} L_m \quad L_{21m} = \frac{m_1}{2} L_m$$

ИНДУКТИВНОСТИ ДЛЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК

Выражения для всех гармоник аналогичны,

Надо лишь учитывать разные полюсные деления $\tau_v = \tau/v$

Индуктивность фазы для v гармонической поля

$$L_{AAv} = \frac{4\mu_0}{p_v \pi^2} (w_1 k_{ov})^2 \tau_v l_\delta \lambda_{1v} \quad \text{где } \lambda_{1v} \text{ – удельная проводимость зазора для } v \text{ гармоники} \quad \lambda_{1v} = \frac{C_{1v}}{\delta k_{\delta 2}}$$

С учетом $\tau_v = \tau/v$ и $p_v = pv$ запишем выражение $L_{AAv} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{v^2} \tau l_\delta \lambda_{1v}$

Взаимная индуктивность между фазами для v гармонической поля

$$L_{BAv} = L_{AAv} \cos(\alpha_{BAv})$$

а) для гармоник, отсутствующих в поле 3-фазной обмотки

где угол по v гармонике $\alpha_{BAv} = v\alpha_{BA}$

($v = 3c$, где c – целое нечетное)

$$\alpha_{BAv} = (3c) \frac{2\pi}{3} = 2\pi \cdot c$$

$$\cos(\alpha_{BAv}) = 1$$

$$L_{BAv} = L_{AAv}$$

б) для гармоник, присутствующих в поле 3-фазной обмотки

($v = 1+2mk$, где k – целое число)

$$\alpha_{BAv} = (1+6k) \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 4\pi \cdot k$$

$$\cos(\alpha_{BAv}) = -\frac{1}{2}$$

$$L_{BAv} = -\frac{1}{2} L_{AAv}$$

Индуктивности для высших гармоник

Индуктивность обмотки для ν гармонической поля

1. Для токов прямой и обратной последовательности

а) для гармоник, отсутствующих в поле 3-фазной обмотки
($\nu = 3c$)

поскольку $L_{AA\nu} = L_{BA\nu} = L_{CA\nu}$ то

поскольку $\dot{I}_{Am\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} = 0$ то

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = \dot{I}_{Am\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} L_{CA\nu}$$

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = L_{AA\nu} (\dot{I}_{Am\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} + \dot{I}_{Cm\nu})$$

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = 0 \quad \text{и индуктивность} \quad L_{1\nu} = 0$$

б) для гармоник, присутствующих в поле 3-фазной обмотки
($\nu = 1+2mk$)

поскольку $L_{BA\nu} = L_{CA\nu} = -\frac{1}{2} L_{AA\nu}$ и

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = \dot{I}_{Am\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} L_{CA\nu}$$

$$\dot{I}_{Am\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} = 0$$

$$\text{то индуктивность} \quad L_{1\nu} = \frac{3}{2} L_{AA\nu}$$

$$\text{где} \quad L_{AA\nu} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$

Индуктивности для высших гармоник

Индуктивность обмотки для ν гармонической поля

2. Для токов нулевой последовательности

а) для гармоник, отсутствующих в поле 3-фазной обмотки $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = \dot{I}_{A0m\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{B0m\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{C0m\nu} L_{CA\nu}$
($\nu = 3c$)

поскольку $L_{AA\nu} = L_{BA\nu} = L_{CA\nu}$ и $\dot{I}_{A0m\nu} = \dot{I}_{B0m\nu} = \dot{I}_{C0m\nu}$

то $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = 3\dot{I}_{A0m\nu} L_{AA\nu}$ и индуктивность $L_{1(0)\nu} = 3L_{AA\nu}$

б) для гармоник, присутствующих в поле 3-фазной обмотки $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = \dot{I}_{A0m\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{B0m\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{C0m\nu} L_{CA\nu}$
($\nu = 1+2mk$)

поскольку $\dot{I}_{A0m\nu} = \dot{I}_{B0m\nu} = \dot{I}_{C0m\nu}$ то $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = \dot{I}_{A0m\nu} (L_{AA\nu} + L_{BA\nu} + L_{CA\nu})$

поскольку $L_{BA\nu} = L_{CA\nu} = -\frac{1}{2}L_{AA\nu}$ то $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = 0$ и индуктивность $L_{1(0)\nu} = 0$

Индуктивности для высших гармоник

В общем случае многофазной обмотки для гармоник, присутствующих в результирующем поле

Индуктивность самоиндукции фазы 0

по ν гармонике

$$L_{00\nu} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$

где число витков в фазе

для простой обмотки $w_1' = \frac{pqw_k}{a}$ для сложной обмотки $w_1 = \frac{2pqw_k}{a}$

Взаимная индуктивность между фазами 0 и n

по ν гармонике

$$L_{0n\nu} = L_{00\nu} \cos(\alpha_{0n\nu})$$

Угол между фазой n и фазой 0

по ν гармонике

для простой обмотки $\alpha_{0n\nu} = \frac{2\pi}{m'} n\nu$ для сложной обмотки $\alpha_{0n\nu} = \frac{2\pi}{m} n\nu$

Полная индуктивность обмотки

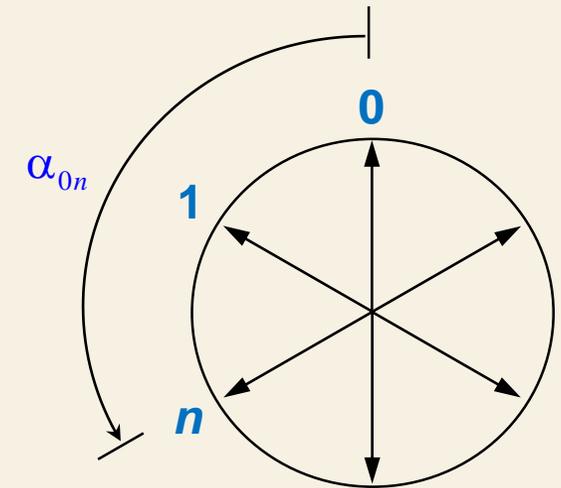
по ν гармонике

для простой обмотки

$$L_{1\nu} = \frac{2m'\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1' k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$

для сложной обмотки

$$L_{1\nu} = \frac{2m\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$



Индуктивность рассеяния обмотки

Поле рассеяния образовано токами статора и ротора, не создающими основную гармонику поля в зазоре

Для этого основные гармоники МДС от токов статора и ротора должны быть равны по величине и противоположны по фазе

$$\text{По величине: } \frac{m_1 \sqrt{2} I_1 w_1 k_{o1}}{p\pi} = \frac{m_2 \sqrt{2} I_2 w_2 k_{o2}}{p\pi}$$

$$\dot{F}_{11m} = -\dot{F}_{21m}$$

Т.е. должно быть соотношение токов (токи в противофазе)

$$I_2 = \frac{m_1 w_1 k_{o1}}{m_2 w_2 k_{o2}} I_1$$

Полевой расчет поля рассеяния

- задать геометрию ЭМ и свойства материалов
- задаться токами I_1 и I_2 (с учетом разности фаз)
- рассчитать магнитное поле
- определить потокоцепления фаз 1 и 2 сердечников
- рассчитать индуктивности рассеяния (с учетом влияния всех фаз всех обмоток)

$$L_{\sigma 1} = \frac{\Psi_{\sigma 1 m}}{\sqrt{2} I_1} \quad L_{\sigma 2} = \frac{\Psi_{\sigma 2 m}}{\sqrt{2} I_2}$$

Не забыть лобовое рассеяние

Индуктивность рассеяния обмотки

На практике, раз уж мы приняли допущение о линейности магнитной цепи, можно применять принцип суперпозиции, рассматривая поля по отдельности

Магнитное поле рассеяния ЭМ

- пазовое рассеяние
 - пазы статора
 - пазы ротора
- лобовое рассеяние
 - лобовые части обмотки статора
 - лобовые части обмотки ротора
- дифференциальное рассеяние
 - высшие гармоники поля от токов статора
 - высшие гармоники поля от токов ротора

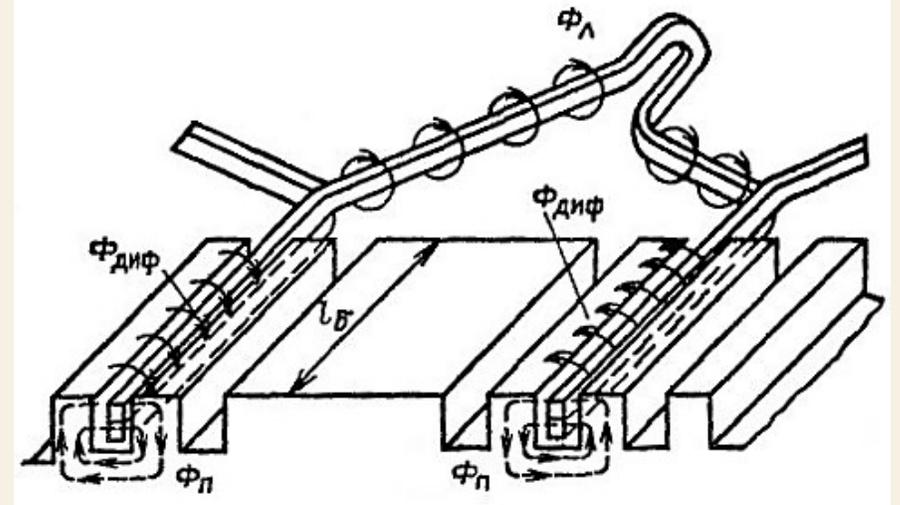
Индуктивность рассеяния обмотки

Каждая катушка создает поля рассеяния

- пазовое $\Phi_{\text{п}}$
- лобовое $\Phi_{\text{л}}$
- дифференциальное $\Phi_{\text{диф}}$

Индуктивность рассеяния одной стороны катушки

$$L_{\text{ок}} = \frac{\sum \Psi_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = \frac{\sum N_{\text{п}} \Phi_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = N_{\text{п}} \frac{\sum F_{Am} \Lambda_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = N_{\text{п}} \frac{\sum N_{\text{п}} \sqrt{2}I_A \Lambda_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = N_{\text{п}}^2 \sum \Lambda_{\sigma}$$



$N_{\text{п}}$ – число проводников в пазу
($N_{\text{п}} = 2w_{\text{к}}$ или $N_{\text{п}} = w_{\text{к}}$)

Фаза обмотки расположена в $2pq$ пазах, но разбита на a параллельных ветвей

Индуктивность одной параллельной ветви $L_{\sigma a} = N_{\text{п}}^2 \Lambda_{\Sigma\sigma} \cdot 2 \frac{pq}{a}$

Индуктивность фазы из a параллельных ветвей

$$L_{\sigma} = \frac{1}{a} N_{\text{п}}^2 \Lambda_{\Sigma\sigma} 2 \frac{pq}{a}$$

Число витков фазы $w = w_{\text{к}} \frac{2pq}{a} = \frac{N_{\text{п}}}{2} \frac{2pq}{a} = N_{\text{п}} \frac{pq}{a}$

в однослойной обмотке $w = w_{\text{к}} \frac{pq}{a} = N_{\text{п}} \frac{pq}{a}$

Тогда индуктивность рассеяния фазы $L_{\sigma} = 2w^2 \frac{1}{pq} \Lambda_{\Sigma\sigma}$ или $L_{\sigma} = 2w^2 \frac{\mu_0 l_{\delta}}{pq} \lambda_{\sigma}$

где $\lambda_{\sigma} = \lambda_{\text{сп}} + \lambda_{\text{сл}} + \lambda_{\text{сд}}$
– коэффициент проводимости

Для двухслойной обмотки $\lambda_{\text{сп}}$ должен учитывать укорочение шага катушки

Индуктивность рассеяния обмотки

Обмотки сердечников 1 и 2 различны и рассчитываются как

- Индуктивность рассеяния обмотки 1 сердечника

$$L_{\sigma 1} = 2\mu_0 w_1^2 \frac{l_1}{pq_1} \lambda_{\sigma 1}$$

- Индуктивность рассеяния обмотки 2 сердечника

$$L_{\sigma 2} = 2\mu_0 w_2^2 \frac{l_2}{pq_2} \lambda_{\sigma 2}$$

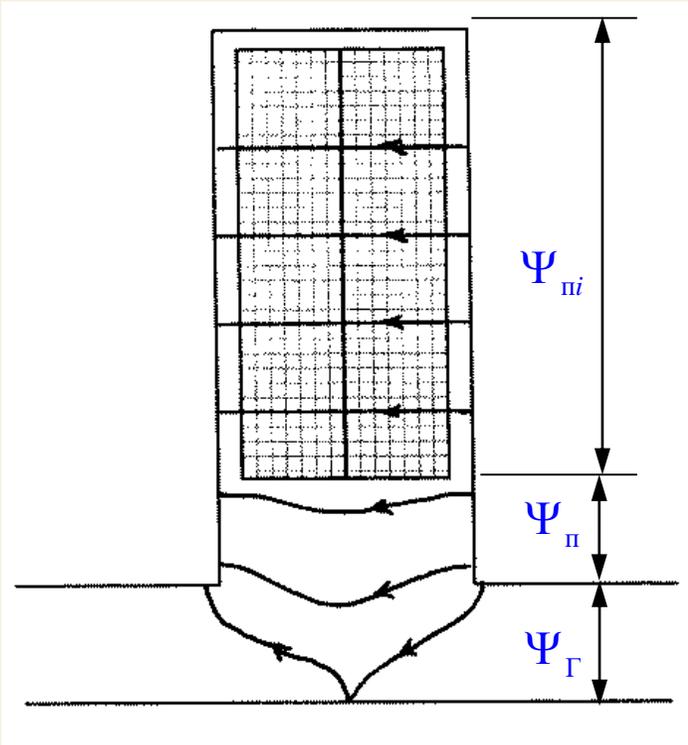
где коэффициенты магнитной проводимости для потокосцепления рассеяния

$$\lambda_{\sigma 1} = \lambda_{\sigma 11} + \lambda_{\sigma 12} + \lambda_{\sigma 13}$$

$$\lambda_{\sigma 2} = \lambda_{\sigma 21} + \lambda_{\sigma 22} + \lambda_{\sigma 23}$$

Пазовое рассеяние

а) численный расчет поля пазового рассеяния



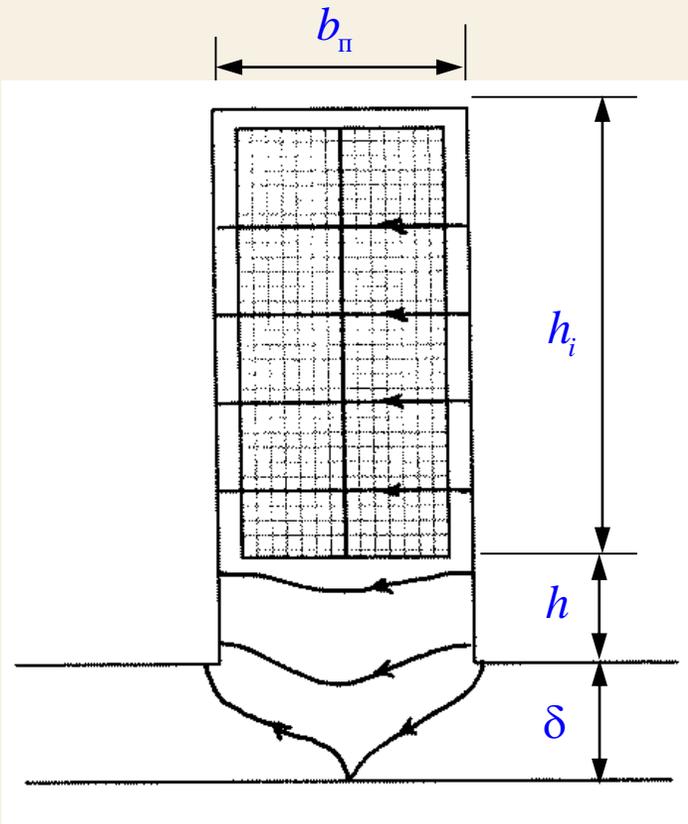
- модель одиночного паза (можно на ед.длины $l = 1$ м)
- насыщение не влияет $\rightarrow \mu_{ст} = \infty$
- граничные условия (можно учесть симметрию)
- ток паза i_{π} (произвольно)
- расчет поля
- определение потокосцеплений
 - потокосцепление токовой части паза (можно Ψ катушки)
 - потокосцепление безтоковой части паза (можно Φ)
 - потокосцепление по головкам зубцов (можно Φ)
- потокосцепление пазового рассеяния (полное в Вб)
$$\Psi_{\sigma\pi} = \Psi_{\pi i} + \Psi_{\pi} + \Psi_{\Gamma}$$
- коэффициент проводимости

$$\lambda_{\sigma\pi} = \frac{\Psi_{\sigma\pi}}{i_{\pi}} \frac{1}{\mu_0 l}$$

Пазовое рассеяние

б) использование инженерных методик (книги по проектированию ЭМ)

Например, для паза прямоугольной формы



Коэффициент проводимости пазового рассеяния

$$\lambda_{\sigma\Pi} = \lambda_{\Pi i} + \lambda_{\Pi} + \lambda_{\Gamma} = \frac{h_i}{3b_{\Pi}} + \frac{h}{b_{\Pi}} + \lambda_{\Gamma}$$

Коэффициент проводимости рассеяния по головкам зубцов

$$\lambda_{\Gamma} = \frac{\delta}{b_{\Pi}} - \frac{\gamma'}{4} - \frac{\Theta}{2}$$

где $\gamma' = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{\Pi}}} \arctg \frac{1}{\sqrt{a_{\Pi}}} - \ln \sqrt{1 + \frac{1}{a_{\Pi}}} \right)$ $a_{\Pi} = \left(\frac{b_{\Pi}}{2\delta} \right)^2$ $\Theta = \frac{\ln 4}{\pi}$

Для двухслойной обмотки
надо учесть укорочение катушки

$$\lambda_{\sigma\Pi} = \left(\frac{h_i}{3b_{\Pi}} + \frac{h}{b_{\Pi}} + \lambda_{\Gamma} \right) \frac{3\beta + 1}{4}$$

Лобовое рассеяние

- а) численный расчет поля лобового рассеяния (3D) – крайне редко
- б) использование инженерных методик

В большинстве случаев учитывают только относительный вылет лобовой части катушки

$$\beta_B = \frac{l_B}{y} = \frac{l_B}{\beta\tau}$$

Коэффициент проводимости лобового рассеяния

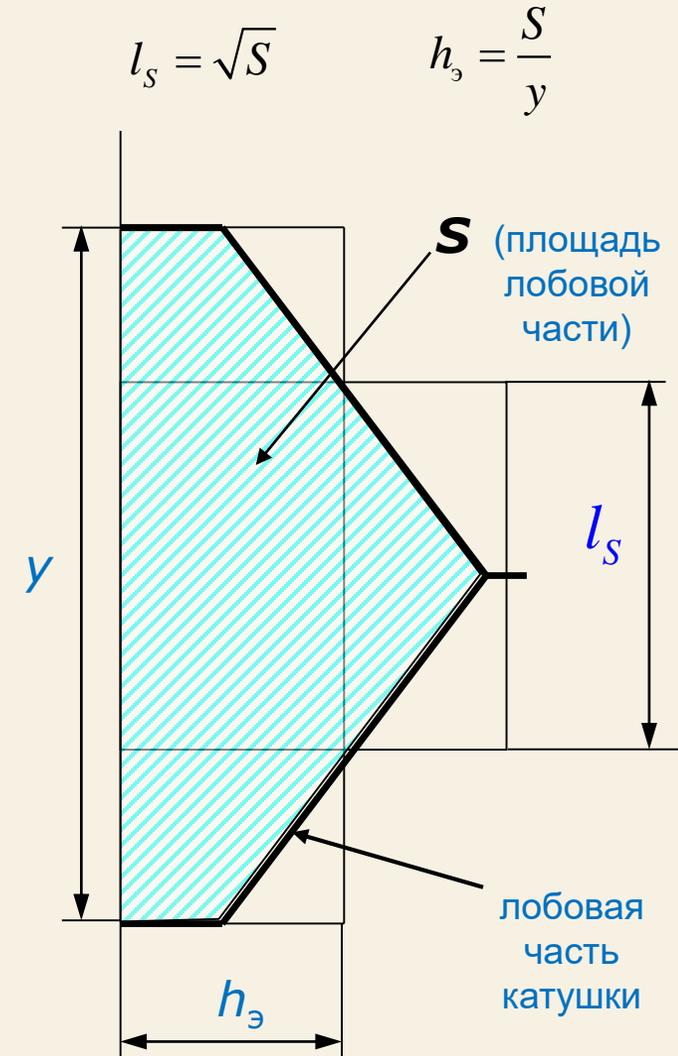
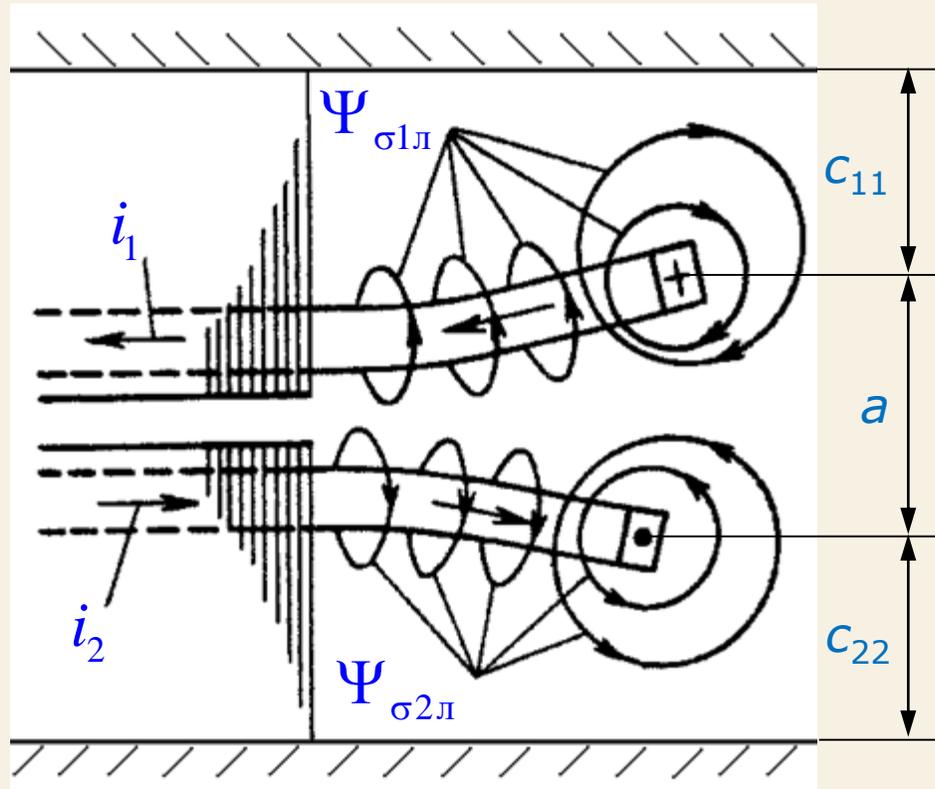
$$\lambda_{\text{сл}} = 0,34\sqrt{\beta_B + 0,1} \frac{\beta\tau q}{l_{\text{ст}}}$$

Более точный вариант – методика И.Майе

- физическое моделирование полей лобового рассеяния
- метод планирования эксперимента
- полиномиальные зависимости $\lambda_{\text{сл}}$
- расчет $\lambda_{\text{сл}}$ для базовой обмотки
- поправочные коэффициенты для прочих обмоток

Лобовое рассеяние по методике И.Майе

Характерные размеры



Лобовое рассеяние по методике И.Майе

По результатам экспериментов получена эмпирическая формула для расчета коэффициента проводимости лобового рассеяния (для токов прямой и обратной последовательности)

Для обмотки 1
$$\lambda_{\sigma 1л} = \frac{l_{S1}}{2l_1 q_1} (\lambda_{11} - \lambda_{12})$$

Аналогично для обмотки 2
$$\lambda_{\sigma 2л} = \frac{l_{S2}}{2l_2 q_2} (\lambda_{22} - \lambda_{21})$$

Здесь коэффициент проводимости самоиндукции лобового рассеяния обмотки 1

$$\lambda_{11} = k_p k_\beta k_{c1} \lambda'_{11}$$

коэффициент проводимости взаимоиндукции лобового рассеяния обмотки 1 с обмоткой 2

$$\lambda_{12} = k_p k_\beta k_a k_h k_{c2} \lambda'_{12}$$

коэффициенты проводимости для базовой обмотки

$$\lambda'_{11} = 2,4q_1^2 \quad \lambda'_{12} = 1,45q_1^2$$

Базовая обмотка имеет $2p = 6$,
диаметральный шаг (укорочение $\beta = 1$),
соотношение $a / \tau = 0,225$,
соотношение $h_{\alpha 2} / h_{\alpha 1} = 1$

Коэффициент проводимости лобового рассеяния для токов нулевой последовательности

Отличия всех прочих обмоток учитываются поправочными коэффициентами k

$$\lambda_{\sigma 1л} = \frac{l_{S1}}{2l_1 q_1} \lambda_{10} \quad \lambda_{10} = k_p k_\beta k_{c1} \lambda'_{10} \quad \lambda'_{10} = 0,31q_1^2$$

Лобовое рассеяние по методике И.Майе

Поправочные коэффициенты

Учет кривизны лобовой части

$2p$	2	4	6	8, 10...
k_p	1,08	1,04	1,0	0,97

Учет укорочения шага обмотки

β	0,75	0,834	0,918	1,0
k_β	0,935	0,965	0,985	1,0

Учет расстояния между обмотками разных сердечников

a / τ	0,15	0,225	0,3
k_a	1,12	1,0	0,885

Учет соотношения вылетов лобовых частей

$h_{\text{э}2} / h_{\text{э}1}$	0,15	0,4	0,5	0,8	1,0	1,25	2,0	2,5	7,0
k_h	0,57	0,73	0,79	0,94	1,0	1,05	1,12	1,15	1,47

Учет расстояния до ферромагнитных тел: при $\frac{c_{11}}{\tau} > \frac{1}{3}$ и $\frac{c_{22}}{\tau} > \frac{1}{3}$ можно принять $k_{c1} = 1$ и $k_{c2} = 1$

Промежуточные значения можно получать с помощью линейной интерполяции

Дифференциальное рассеяние

– обусловлено высшими гармоническими поля в зазоре

ЭДС дифференциального рассеяния $E_{\sigma d} = \sum_{v \neq 1} E_{\phi v} = 2\sqrt{2} f \omega \tau l_{\delta} \sum_{v \neq 1} \frac{k_{ov} B_{vm}}{v}$

Поскольку пространственные гармоники созданы током I_1 ,
можно использовать коэффициент пропорциональности x

$$\dot{E}_{\sigma d} = -j \dot{I}_1 x_{\sigma d}$$

где индуктивное сопротивление дифференциального рассеяния
является суммой индуктивных сопротивлений
для высших гармонических поля

$$x_{\sigma d} = \sum_{v \neq 1} x_{1v}$$

Тогда коэффициент проводимости дифференциального рассеяния
(в формуле для полной индуктивности рассеяния)
можно записать как

$$\lambda_{\sigma 1d} = \frac{t_{z1}}{12\delta k_{\delta 2}} \zeta$$

$$\text{где } \zeta = 3 \left(\frac{z_1}{\pi p} \right)^2 \sum_{v \neq 1} \left(\frac{k_{ov}}{v} \right)^2 C_{1v}$$

Т.к. ζ близко к 1, часто считают упрощенно $\lambda_{\sigma 1d} = \frac{t_{z1}}{12\delta k_{\delta 2}}$

Дифференциальное рассеяние

Найденное значение $\lambda_{\sigma d}$ часто оказывается завышенным

При расчете ζ учитывается влияние высших гармонических поля, созданных переменным током многофазной обмотки

- Высшие гармонические поля, созданные током статора, вращаются относительно ротора со скоростью скольжения ($\Omega_v - \Omega$)
 - В обмотке ротора они наводят ЭДС с частотой скольжения
 - В замкнутой обмотке появляются токи ротора, противодействующие породившему их полю v гармоники статора

Демпфирующее действие обмотки ротора уменьшает высшие гармонические поля статора

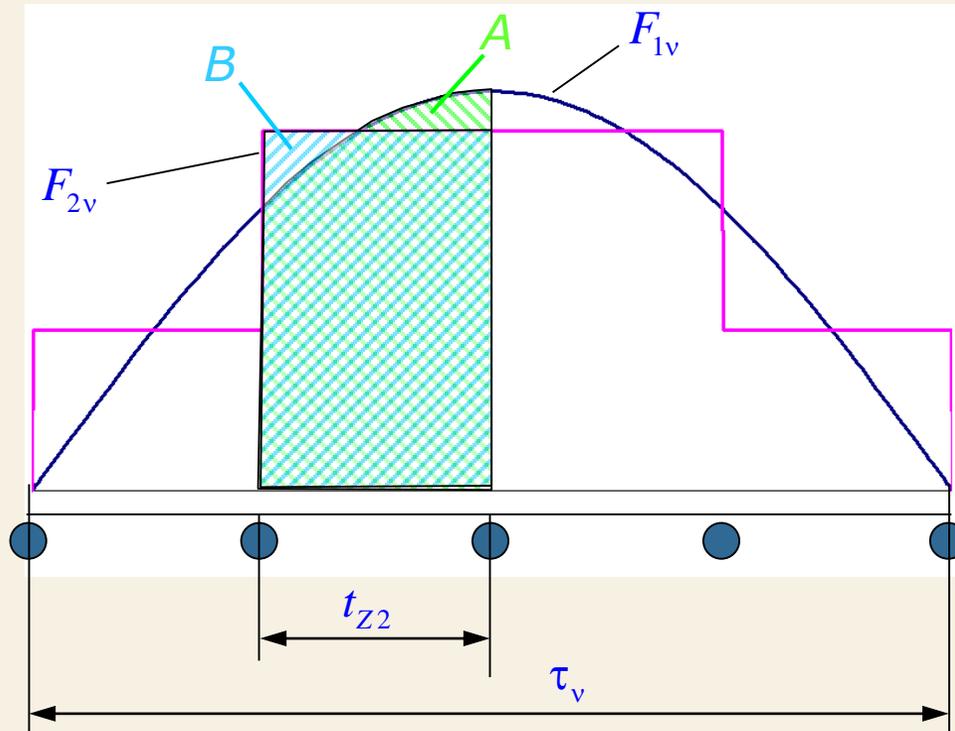
→ уменьшаются наведенные ЭДС

→ уменьшается $\lambda_{\sigma d}$ и $x_{\sigma d}$

Демпфирующее действие оказывается заметным только в АД с КЗ ротором (там и надо уточнять $x_{\sigma d}$ с учетом демпфирования)

Дифференциальное рассеяние

Например, рассмотрим ν гармонику поля статора такую, что $\tau_\nu = 4t_{z2}$



Чем больше отношение τ_ν / t_{z2} , тем лучше демпфирование

- площадь A определяет поток от $F_{1\nu}$, сцепленный с контуром t_{z2}
→ наводит ЭДС, создает ток в контуре и его МДС $F_{2\nu}$
- площадь B определяет компенсирующий поток от МДС $F_{2\nu}$
- тогда разница $(A - B)$ характеризует нескомпенсированный поток (собственно рассеяние с учетом демпфирования)

Полное демпфирование при $t_{z2} \rightarrow 0$ ($z_2 \rightarrow \infty$)

Нет демпфирования при $t_{z2} = 2\tau$

Дифференциальное рассеяние

Для учета демпфирования по ν гармонике используют коэффициент демпфирования D_ν

$$x_{1\nu(\text{д})} = x_{1\nu} D_\nu$$

- при $D_\nu = 0$: $x_{1\nu(\text{д})} = 0 \rightarrow$ сильное демпфирование
- при $D_\nu = 1$: $x_{1\nu(\text{д})} = x_{1\nu} \rightarrow$ нет демпфирования

Коэффициент демпфирования определяется двумя факторами $D_\nu = 1 - f_{2\nu}^2 f_{c\nu}^2$

$$f_{2\nu} = \frac{\sin \frac{\gamma_{2\nu}}{2}}{\frac{\gamma_{2\nu}}{2}} \quad \text{— коэффициент дискретности вторичной обмотки}$$

Здесь $\gamma_{2\nu} = \frac{\pi t_{z2}}{\tau_\nu}$ при $t_{z2} \rightarrow 0$ $f_{2\nu} \rightarrow 1$ (полное демпфирование)
 при $t_{z2} = 2\tau_\nu$ $f_{2\nu} = 0$ (нет демпфирования)

$$f_{c\nu} = \frac{\sin \frac{\gamma_{c\nu}}{2}}{\frac{\gamma_{c\nu}}{2}} \quad \text{— коэффициент скоса стержней вторичной обмотки}$$

Здесь $\gamma_{c\nu} = \frac{\pi b_c}{\tau_\nu}$ при $b_c = 0$ $f_{c\nu} = 1$ (демпфирование возможно)
 при $b_c = 2\tau_\nu$ $f_{c\nu} = 0$ (нет демпфирования)

Тогда коэффициент проводимости дифференциального рассеяния с учетом демпфирования

$$\lambda_{\sigma\text{д}} = \frac{t_{z1}}{12\delta k_{\delta 2}} \zeta_{(\text{д})} \quad \text{где} \quad \zeta_{(\text{д})} = 3 \left(\frac{z_1}{\pi p} \right)^2 \sum_{\nu \neq 1} \left(\frac{k_{o1\nu}}{\nu} \right)^2 C_{1\nu} D_\nu$$