

Раздел 8. Аналитические методы исследования поля в электрической машине. Метод разделения переменных. Поле в плоском и кольцевом зазоре. Поверхностный ток как источник поверхностного потенциала

Значение аналитических методов для изучения магнитного поля в электрической машине

Может показаться, что сейчас, когда возможности современных электронных вычислительных машин позволяют рассчитывать поля в электрических машинах с помощью численных методов не только при минимальных допущениях, но и во взаимодействии друг с другом, аналитические методы исследования полей теряют свое значение. Действительно, применение численных методов позволяет учесть при расчете электрических, магнитных, тепловых полей и поля механических напряжений такие сложные явления, как насыщение магнитной цепи, вытеснение тока в массивных токоведущих элементах, изменение во времени сложной конфигурации воздушного зазора. В то же время, с помощью аналитических методов поля обычно рассматриваются при значительных допущениях: при бесконечной магнитной проницаемости сердечников, при упрощенной форме зазора и т.п.

Такой вывод, однако, неверен. Аналитические методы по-прежнему играют важную роль при изучении свойств электрических машин, они позволяют выявить зависимости характеристик машины от ее основных размеров и тем самым сформировать правильное понимание главных принципов ее проектирования.

Мы рассмотрим применение аналитических методов для решения только относительно простых полей, описываемых уравнениями Лапласа,

однако и в этом случае результаты окажутся весьма полезными для построения аналитической общей теории электрических машин.

Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных в случае прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольную область, на границах которой заданы условия Дирихле и/или Неймана для скалярного магнитного потенциала:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0(x, y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= f_0(x, y) \end{aligned} \right\}$$

Магнитное поле в рассматриваемой области описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Общим подходом к решению методом разделения переменных является предположение (догадка!) о том, что искомая функция $\psi(x, y)$ может быть представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$\psi = X(x) \cdot Y(y) \quad (8.1)$$

Вторые производные в этом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

После подстановки в уравнение Лапласа и деления на произведение $X(x) \cdot Y(y)$ получим

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0,$$

откуда получим два дифференциальных уравнения с одним переменным в каждом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= C \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} &= -C \end{aligned} \right\}$$

Примем, что $C > 0$, и для того чтобы подчеркнуть это, будем считать

$$C = \alpha^2 \quad (8.3)$$

Решим полученную систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \alpha^2 Y(y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 X(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Характеристические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p^2 - \alpha^2 = 0 &\rightarrow p_{1,2} = \pm \alpha \\ p^2 + \alpha^2 = 0 &\rightarrow p_{1,2} = \pm j\alpha \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Решения дифференциальных уравнений (8.4):

$$\left. \begin{aligned} Y_\alpha &= g'_\alpha e^{\alpha y} + h'_\alpha e^{-\alpha y} = g_\alpha sh(\alpha y) + h_\alpha ch(\alpha y) \\ X_\alpha &= c'_\alpha e^{\alpha x} + d'_\alpha e^{-\alpha x} = c_\alpha \sin(\alpha x) + d_\alpha \cos(\alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Функции, являющиеся решением системы дифференциальных уравнений, снабдим нижним индексом α , означающим, что результат зависит от этой величины, в свою очередь определяющейся граничными условиями.

Рассмотрим частный случай: $\alpha = 0$ ($C = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 &\rightarrow Y_0 = K'_3 + K'_4 y \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 &\rightarrow X_0 = K'_1 + K'_2 x \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

и теперь еще два частных случая этого частного случая:

$$\psi \neq \psi(x)$$

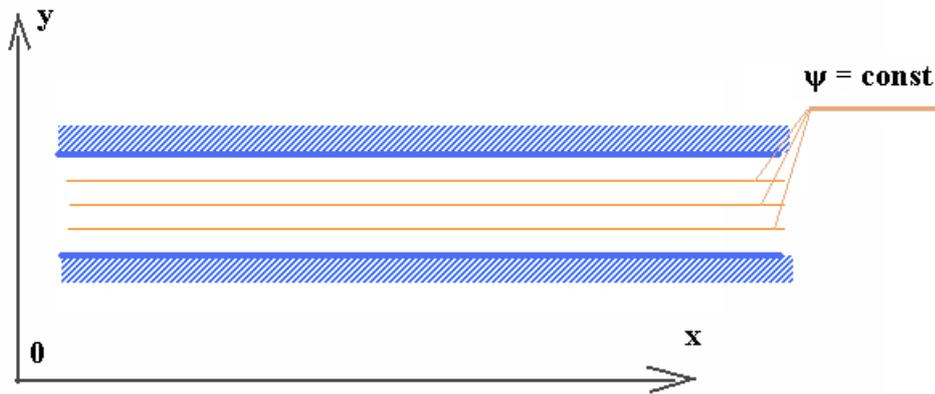
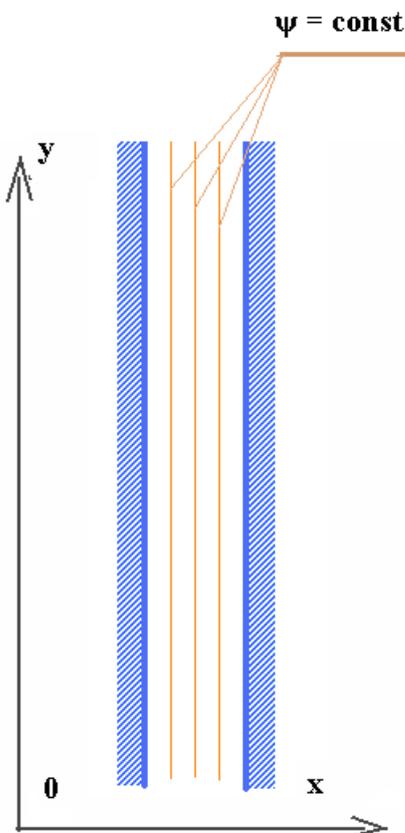


Рис. 8.1. Решение (8.7) для случая $\psi \neq \psi(x)$

$$Y_0 = K'_3 + K'_4 y$$

$$X_0 = K'_1$$

и $\psi \neq \psi(y)$:



$$Y_0 = K'_3$$

$$X_0 = K'_1 + K'_2 x$$

Приведенные два примера иллюстрируют равномерное поле, эквипотенциали которого (следы поверхностей равного скалярного магнитного потенциала) параллельны поверхностям сердечников, между которыми задана постоянная разность скалярных магнитных потенциалов.

Рис. 8.2. Решение (8.7) для случая $\psi \neq \psi(y)$

В общем виде решение рассматриваемой задачи можно записать так:

$$\psi = \sum X_{\alpha} Y_{\alpha} = \underbrace{K_1 + K_2 x + K_3 y}_{\text{равномерное поле}} + \sum_{\alpha} Y_{\alpha} X_{\alpha} \quad (8.8)$$

В дальнейшем нашей целью является определение постоянных K_1 , K_2 и K_3 и постоянных, входящих в X_{α} и Y_{α} , при заданных граничных условиях.

Магнитное поле в зазоре электрической машины при гармоническом распределении потенциала по поверхности возбужденного сердечника

Аналитическое решение

К задаче о поле, созданном гармоническим распределением скалярного магнитного потенциала, мы приходим после гармонического анализа поля в зазоре (т.е. после разложения пространственного распределения МДС зубчатого сердечника в ряд Фурье). В частности, мы придем к этой задаче, если будем считать пазы бесконечно узкими, а радиус кривизны сердечников бесконечно большим. При этом допущении скалярный магнитный потенциал на поверхности возбужденного сердечника меняется скачком на оси каждого паза на величину тока этого паза.

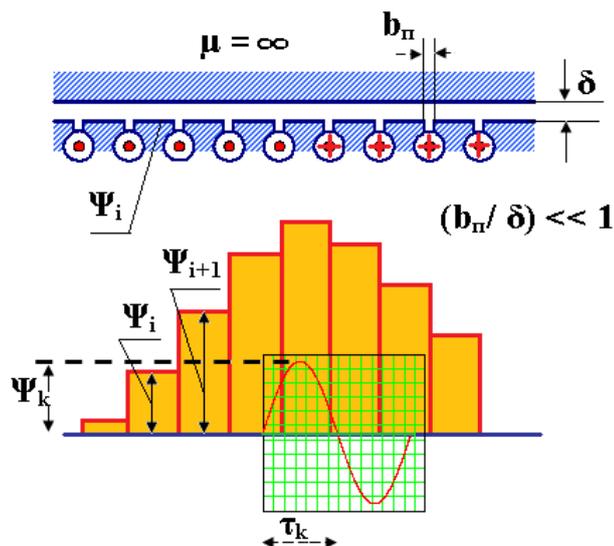


Рис. 8.3. Построение кривой МДС обмотки

Результат разложения ступенчатой кривой МДС в ряд Фурье:

$$\psi_0(x) = \Psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k \cos\left(\frac{k\pi}{\tau_1} x + \beta_k\right) \quad (8.9)$$

Задачу с заданным постоянным (не зависящим от x) потенциалом мы уже решили. Имея в виду применить суперпозицию, рассмотрим теперь поле от какой-либо одной гармонической потенциала

$$\psi_0(x) = \Psi_k \cos\left(\frac{\pi}{\tau_k} x\right) \quad (8.10)$$

Соотношение между длиной зазора δ и полюсным делением τ_k при заданных размерах зоны воздушного зазора зависит от порядка гармоники и может быть довольно большим, особенно для машин с большим зазором, например, турбогенераторов. Как будет показано в дальнейшем, от отношения этих размеров зависит степень затухания поля гармоники в зазоре.

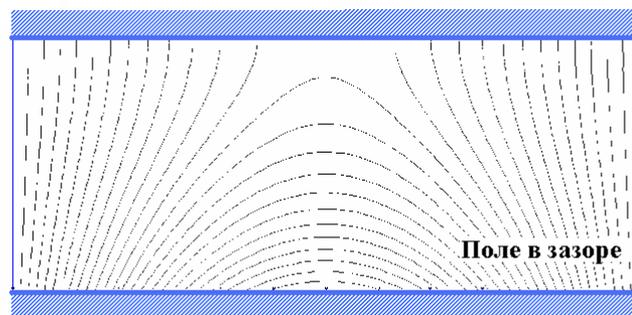


Рис. 8.4. Гармоническое распределение потенциала на поверхности возбужденного сердечника и картина поля в равномерном воздушном зазоре

Граничные условия для скалярного магнитного потенциала:

$$\text{на поверхности } y=0: \quad \psi_0(x) = \Psi_k \cos\left(\frac{\pi}{\tau_k} x\right) \quad (8.10)$$

$$\text{на поверхности } y=\delta: \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (8.11)$$

Заметим, что для решения задачи нам будет достаточно задать граничные условия только на этих двух границах, вправо и влево область задачи может быть продлена до бесконечности.

Обратившись к выражению (8.8)

$$\psi = \sum X_\alpha Y_\alpha = \underbrace{K_1 + K_2 x + K_3 y}_{\text{равномерное поле}} + \sum_\alpha Y_\alpha X_\alpha,$$

заметим, что, поскольку источников униполярного поля в рассматриваемой задаче не задано, первые три слагаемые в решении будут отсутствовать. Впрочем, при выводе они будут исключены и формально ($K_1 = K_2 = K_3 = 0$).

Для определения коэффициентов в (8.8) воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \sum_{\alpha} (c_\alpha \sin(\alpha x) + d_\alpha \cos(\alpha x)) \cdot (g_\alpha \operatorname{sh}(\alpha \cdot 0) + h_\alpha \operatorname{ch}(\alpha \cdot 0)) = \\ &= \Psi_k \cos\left(\frac{\pi}{\tau_k} x\right), \end{aligned}$$

откуда при $y=0$

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau_k}; \quad c_\alpha = 0; \quad d_\alpha h_\alpha = \Psi_k \quad (8.12)$$

После подстановки (с учетом того, что при единственном значении α в суммировании по α нет необходимости):

$$\psi(x, y) = \left(\underbrace{d_\alpha g_\alpha}_{\substack{\text{обозначим} \\ \text{через } g}} \operatorname{sh}(\alpha y) + \Psi_k \operatorname{ch}(\alpha y) \right) \cos(\alpha x) \quad (8.13)$$

На верхней границе $y = \delta$:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \alpha(g \cdot sh(\alpha\delta) + \Psi_k ch(\alpha\delta)) \sin(\alpha x) = 0 \quad (8.14)$$

откуда определяется g :

$$g = -\frac{\Psi_k ch(\alpha\delta)}{sh(\alpha\delta)} \quad (8.15)$$

и после очередной подстановки:

$$\psi(x, y) = \Psi_k \left(ch(\alpha y) - \frac{ch(\alpha\delta)}{sh(\alpha\delta)} sh(\alpha y) \right) \cos(\alpha x)$$

и после небольших преобразований получим окончательное решение:

$$\psi(x, y) = \Psi_k \frac{sh(\alpha(\delta - y))}{sh(\alpha\delta)} \cos(\alpha x) \quad (8.16)$$

Как следует из (8.16), при $y = \delta$ $\psi(x, y) = 0$.

Это важный вывод. Теперь можно дать более строгое определение намагничивающей силы: под намагничивающей силой будем понимать разность скалярных магнитных потенциалов между сердечниками:

$$F(x) = \psi_0(x) - \psi(x, y) \quad (8.17)$$

(y=0) (y=δ)

В рассматриваемом случае

$$F(x) = \Psi_k \cos\left(\frac{\pi}{\tau_k} x\right). \quad (8.17a)$$

Решение для напряженности поля:

$$\left. \begin{aligned} H_t = H_x &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \alpha \Psi_k \frac{sh(\alpha(\delta - y))}{sh(\alpha\delta)} \sin(\alpha x) \\ H_n = H_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \alpha \Psi_k \frac{ch(\alpha(\delta - y))}{sh(\alpha\delta)} \cos(\alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

На основании (8.18) можно рассчитать картину поля в зазоре.

Частные случаи.

На поверхности возбужденного сердечника ($y = 0$):

$$H_t = H_x = \alpha \Psi_k \sin(\alpha x) \quad (8.19)$$

$$H_{t.\max} = \alpha \Psi_k; \quad (\alpha x = \pi/2); \quad H_{t.\max} = \frac{\pi \Psi_k}{\tau_k}; \quad x = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\tau_k}{2}$$

$$H_t = 0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=\tau_k$$

$$H_n = \alpha \Psi_k \frac{ch(\alpha\delta)}{sh(\alpha\delta)} \cos(\alpha x) \quad (8.20)$$

На поверхности невозбужденного сердечника ($y = \delta$):

$$\left. \begin{array}{l} H_t = 0 \\ H_n = \alpha \Psi_k \frac{1}{sh(\alpha\delta)} \cos(\alpha x) \end{array} \right\} \quad (8.21)$$

при $x=0$ $H_n = H_{n.\max}$; при $x=\tau_k$ $H_n = -H_{n.\max}$ и при $x=\tau_k/2$ $H_n = 0$.

Можно убедиться в том, что потенциал верхней поверхности равен нулю, так: проведем перпендикуляр к поверхности возбужденного сердечника из точки $x = \tau_k/2$, в которой потенциал равен нулю (в соответствии с заданным граничным условием). Как следует из решения (8.16), проведенная линия является эквипотенциалью (поскольку $x = const$, потенциал на ней также постоянен и, следовательно, равен нулю). Это означает, что потенциал в точке пересечения проведенного перпендикуляра с верхней границей равен нулю, а ранее было показано, что верхняя граница является эквипотенциалью.

Важное соотношение:

$$\frac{H_{n(y=\delta)}}{H_{n(y=0)}} = \frac{1}{ch(\alpha\delta)} \quad (8.22)$$

Выражение (8.22) показывает, что нормальная составляющая напряженности поля, а, следовательно, и поток, уменьшаются при удалении от возбужденной поверхности. Степень затухания определяется отношением (δ/τ_k) , т.к. $\alpha\delta = (\pi\delta/\tau_k)$. Очевидно, что чем выше порядок гармоники (т.е. чем меньше полюсное деление τ_k), тем сильнее затухает ее поле в зазоре.

(δ/τ_k)	0,032	0,1	0,5	1,0
$ch(\alpha\delta)$	0,995	0,95	0,4	0,087

В асинхронных машинах зазор мал и поток практически не затухает. В турбогенераторах, напротив, зазор делают большим, для того чтобы обеспечить хорошую статическую перегружаемость (в наиболее мощных генераторах до 12-15 см), и поля пространственных гармоник в зазоре турбогенератора заметно затухают. Это обстоятельство надо обязательно учитывать при расчете потерь в массивных роторах от несинхронных полей.

Обратим внимание на еще одно полезное соотношение:

$$\frac{H_{t.\max}}{H_{n.\max}} = th(\alpha\delta) = th\left(\pi \frac{\delta}{\tau_k}\right) \quad (8.23)$$

Удельная магнитная проводимость воздушного зазора

Дадим определение удельной проводимости зазора:

$$H_{n(y=\delta)} = \lambda_0 \Psi_{(y=0)} \quad (8.24)$$

Для рассмотренной задачи

$$\lambda_0 = \frac{H_{n(y=\delta)}}{\Psi_{(y=0)}} = \frac{\alpha \Psi_k \frac{1}{sh(\alpha\delta)} \cos(\alpha x)}{\Psi_k \cos(\alpha x)} = \frac{\alpha}{sh(\alpha\delta)} = \frac{\alpha\delta}{sh(\alpha\delta)} \frac{1}{\delta} < \left(\frac{1}{\delta}\right)$$

Все же приближенно можно принять (с погрешностью до 5%, если $\alpha\delta \leq 0,5$, т.е. $(\delta/\tau_k) \leq 0,15$)

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{\delta} \quad (8.25)$$

Часто бывает необходимо определить поток, проходящий через воздушный зазор. Имеет смысл искать поток через поверхность $y = const$:

$$\Phi_{(y=const)} = \int_{-\tau_k/2}^{\tau_k/2} \mu H_y dx = 2\mu \Psi_k \frac{ch(\alpha(\delta - y))}{sh(\alpha\delta)} \quad (8.26)$$

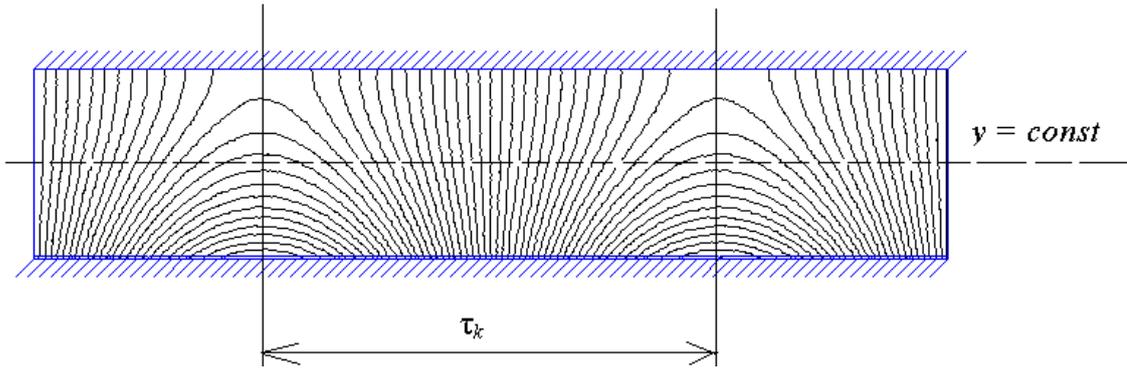


Рис. 8.5. Картина поля в равномерном воздушном зазоре на длине периода k -й гармоники МДС

Коэффициент затухания потока в зазоре:

$$\frac{\Phi_{(y=\delta)}}{\Phi_{(y=0)}} = \frac{1}{ch(\alpha\delta)} \quad (8.22a)$$

Упрощения в формулах при малых зазорах

Довольно часто при рассмотрении поля основной гармоники или гармоник невысоких порядков можно допустить $\delta \ll \tau_k$. Поскольку при этом аргумент гиперболических функций стремится к нулю, $sh(\alpha\delta) \rightarrow \alpha\delta$ и $ch(\alpha\delta) \rightarrow 1$. Полученные выражения при этом упрощаются, в частности:

$$H_n = H_y = \Psi_k \cos(\alpha x) \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{\Psi_0(x)}{\delta} = \frac{F_k(x)}{\delta} \approx \lambda_0 F_k(x) \quad (8.27)$$

Потоки через поверхности $y=0$ и $y=\delta$ в этом случае будут одинаковы (затухания не будет):

$$\Phi_{(y=\delta)} = \Phi_{(y=0)} = 2\mu\Psi_k \frac{1}{sh(\alpha\delta)} = 2\mu\Psi_k \frac{1}{\alpha\delta} = \frac{2}{\pi} \Psi_k \mu \frac{\tau_k}{\delta} \quad (8.28)$$

Частные случаи: бесконечно большой зазор

Эта задача для вращающихся машин (т.е. для машин с цилиндрическими сердечниками) решается приближенно, т.к. в этом случае учет кривизны сердечника уже существенен. Предположение о бесконечности радиуса кривизны сердечника в этом случае приводит к большей погрешности, чем при решении предыдущей задачи.

При $\alpha\delta \rightarrow \infty$ $ch(\alpha\delta) \approx sh(\alpha\delta)$ и $ch(\alpha\delta) - sh(\alpha\delta) = e^{-\alpha y}$.

С учетом этого

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y) &\approx \Psi_k e^{-\alpha y} \cos(\alpha x) \\ H_n = H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \approx \alpha \Psi_k e^{-\alpha y} \cos(\alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Как следует из (8.29), при удалении от сердечника затухание и скалярного магнитного потенциала, и нормальной составляющей напряженности поля происходит по экспоненциальному закону.

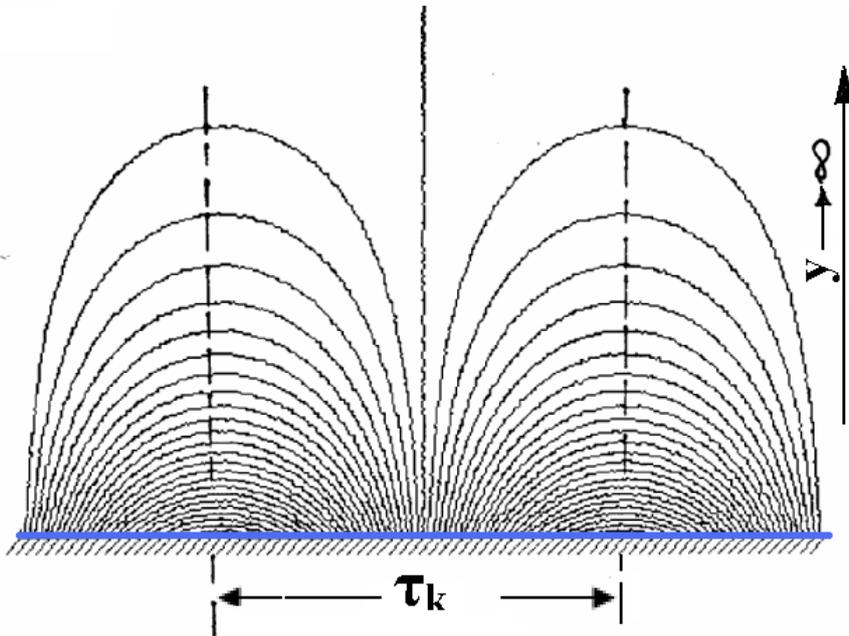


Рис. 8.6. Картина поля, созданного гармоникой МДС, при удалении верхней границы в бесконечность.

Теперь можно ввести понятия, проясняющие физический смысл α (до сих пор мы рассматривали α как формально введенную величину, использо-

ванную при решении дифференциального уравнения. В дальнейшем из граничного условия $\Psi_{(y=0)} = \Psi_k \cos\left(\frac{\pi}{\tau_k} x\right)$ обнаружилось, что $\alpha = \frac{\pi}{\tau_k}$. Но оказывается, что α имеет и вполне определенный физический смысл: при подстановке во второе уравнение (8.29) $y = (1/\alpha)$ мы видим, что поле затухает в e раз. Расстояние

$$y = (1/\alpha) = (\tau_k / \pi) = \Delta_0 \quad (8.30)$$

называется глубиной проникновения поля (в рассматриваемом случае, когда внешним пространством является воздух, Δ_0 - глубина проникновения поля в непроводящее пространство).

Важное следствие. При уменьшении τ_k уменьшается и Δ_0 - поля гармоник более высокого порядка затухают быстрее.

Поверхностный ток как источник гармонического поля

В рассмотренной задаче распределение скалярного магнитного потенциала по поверхностям сердечников неодинаково:

$$\Psi_{(y=\delta)} = 0; \quad \Psi_{(y=0)} = \Psi_k \cos(\alpha x).$$

Изменение потенциала на поверхности возбужденного сердечника может происходить только в результате действия поверхностного тока. Применив закон полного тока к контуру, охватывающему участок тонкого слоя тока, получим граничное условие на поверхности раздела двух сред:

$$H_{1t} - H_{2t} = i_z.$$

Здесь индекс 1 соответствует возбужденному (нижнему) сердечнику, индекс 2 – воздушному зазору.

Поскольку $H_{1t} = 0$,

$$i_z = -H_{2t} = -H_t = -H_x.$$

Для рассматриваемой k -ой гармоники

$$i_{zk} = -H_{x(y=0)} = -\alpha\Psi_k \sin(\alpha x). \quad (8.31)$$

Этот поверхностный ток – модель распределенного по пазам тока обмотки: мы считаем токи пазов сосредоточенными на дне пазов, а сами пазы при этом считаем бесконечно узкими – таким образом, мы приходим к гладкому зазору с вынесенными на поверхность токами. Кроме того, для гармонического поля мы рассматриваем только одну гармонику.

Амплитуда поверхностного тока:

$$i_{z,\max} = H_{t,\max} = \alpha\Psi_k = \frac{\pi\Psi_k}{\tau_k} = \frac{\pi F_k}{\tau_k} \quad (8.32)$$

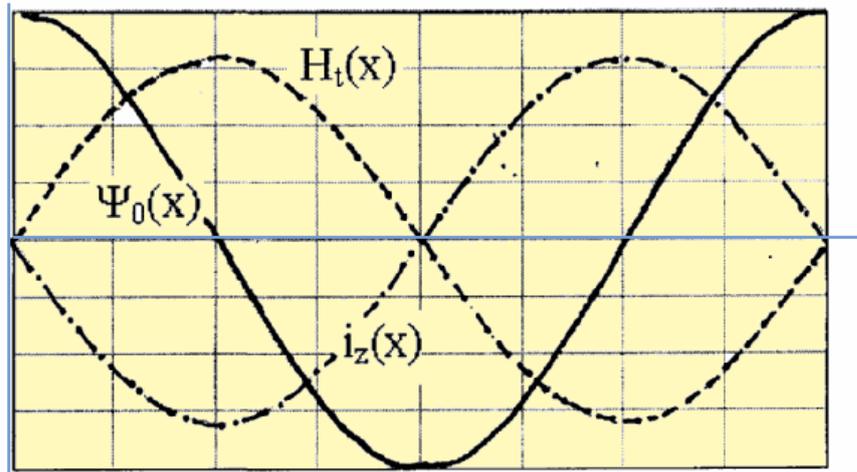


Рис. 8.7. Распределения скалярного потенциала, линейной плотности поверхностного тока и тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности возбужденного сердечника.

Магнитное поле в воздушном зазоре с учетом кривизны сердечников

Ниже приводятся основные результаты выводов – сами выводы не приводятся.

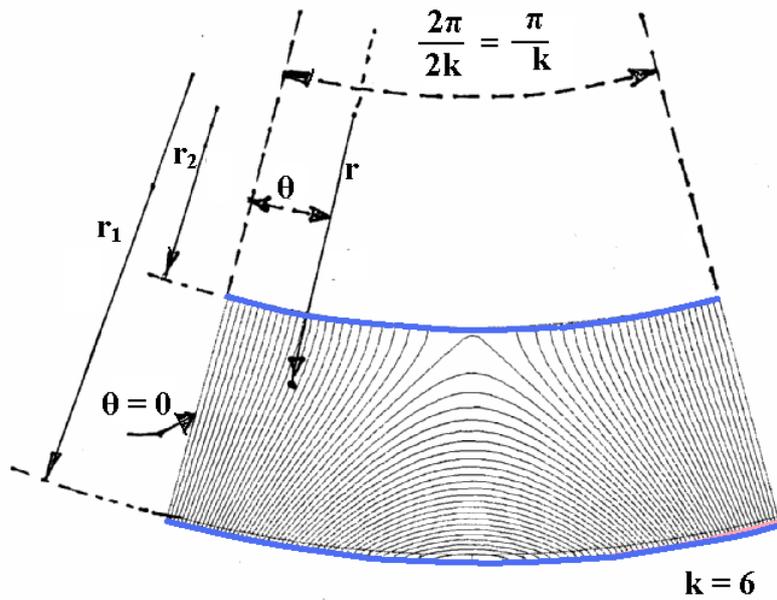


Рис. 8.8. Поле в кольцевом зазоре при гармоническом возбуждении одного из сердечников (в рассматриваемом случае – нижнего) на половине периода шестой гармоники

Возбужденному сердечнику присвоим индекс 1, невозбужденному – индекс 2. В данном случае возбужден внешний сердечник, однако может быть возбужден и/или внутренний.

Граничные условия:

- на поверхности возбужденного сердечника – гармоническое распределение скалярного магнитного потенциала:

$$\Psi_{0(r=r_1)}(\theta) = \Psi_k \cos(k\theta),$$

$$\tau_{2k} = \frac{\pi \cdot r_2}{k}; \quad \tau_{1k} = \frac{\pi \cdot r_1}{k};$$

- на поверхности невозбужденного сердечника:

$$H_r = H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0,$$

$$\Psi_{(r=r_2)} = \text{const.}$$

Уравнение Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (8.33)$$

Как и при рассмотрении плоского зазора, применим метод разделения переменных – будем искать решение в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от r , а другая – от θ :

$$\psi(r, \theta) = R(r) \cdot S(\theta)$$

Результат решения:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = & \underbrace{K_1 + K_{2\theta} + K_3 \ln(r)}_{\substack{\text{связаны с постоянными} \\ \text{потенциалами на поверхно-} \\ \text{стях сердечников}}} + \\ & + \sum (c_m r^m + d_m r^{-m}) (g_m \cos(m\theta) + h_m \sin(m\theta)) \end{aligned} \quad (8.34)$$

После подстановки граничных условий (как и при решении прежней задачи) получим окончательное решение:

$$\psi(r, \theta) = \Psi_k \frac{r^k - r^{-k} r_2^{2k}}{r_1^k - r_2^{2k} r_1^{-k}} \cos(k\theta) \quad (8.35)$$

$$\left. \begin{aligned} H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} &= \frac{\Psi_k k}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2k}} \sin(k\theta) \\ H_r = -\frac{d\psi}{dr} &= -\frac{\Psi_k k}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{k-1} \frac{1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2k}} \cos(k\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

При малом зазоре эти формулы приводятся к выведенным ранее для задачи без учета кривизны сердечников.

Удельная проводимость зазора с учетом кривизны сердечников

Определим удельную магнитную проводимость кольцевого воздушно-го зазора аналогично тому, как это было сделано ранее для плоского зазора:

$$H_{r(r=r_2)} = -\psi_{0(r=r_1)} \cdot \lambda,$$

$$\lambda = \frac{k}{r_1} v^{k-1} \cdot \frac{2}{1 - v^{2k}} \quad (8.37)$$

где

$$v = \frac{r_2}{r_1}.$$

В (8.37) знак минус объясняется тем, что в рассмотренной задаче, при возбуждении *внешнего* сердечника, положительное направление вектора индукции противоположно направлению отсчета координаты r . В задаче о поле в плоском зазоре эти направления совпадали.

Магнитные потоки (на единицу длины) через поверхности $r = r_1$ и $r = r_2$:

$$\left. \begin{aligned} |\Phi_{(r=r_1)}| &= \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \mu H_r r_1 d\theta = 2\mu \Psi_k \frac{1 + v^{2k}}{1 - v^{2k}} \\ |\Phi_{(r=r_2)}| &= \int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \mu H_r r_2 d\theta = 2\mu \Psi_k \frac{2}{1 - v^{2k}} \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Отношение этих потоков:

$$\frac{\Phi_{(r=r_2)}}{\Phi_{(r=r_1)}} = \frac{2}{v^{-k} + v^k} \quad (8.39)$$

При $v > 1$ возбуждение осуществляется со стороны внутреннего сердечника (обычно внутренним сердечником является ротор). Как уже было замечено, чем выше порядок гармоники, тем больше затухает ее поле в зазоре.

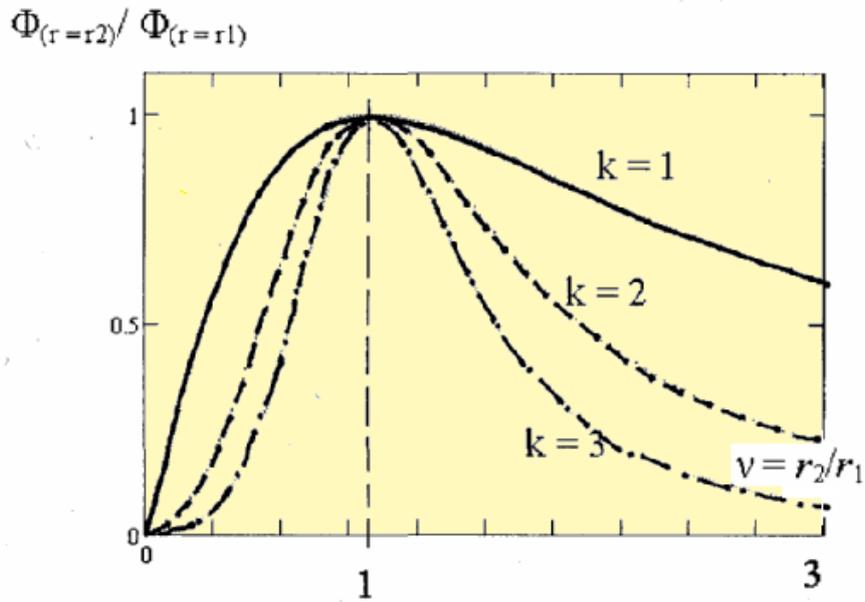


Рис. 8.9. Зависимость отношения потока на невозбужденном сердечнике к потоку на возбужденном сердечнике от отношения радиуса невозбужденного сердечника к радиусу возбужденного сердечника для первой, второй и третьей гармоник

Частные случаи

Поле при отсутствии внутреннего сердечника (опыт с вынутым ротором).

В этом случае $r_2 = 0$ и формулы для радиальной и тангенциальной составляющих напряженности магнитного поля выглядят проще:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{k\Psi_k}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{k-1} \cos(k\theta) \\ H_\theta &= \frac{k\Psi_k}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{k-1} \sin(k\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Поле при удаленном внутреннем сердечнике выглядит следующим образом:

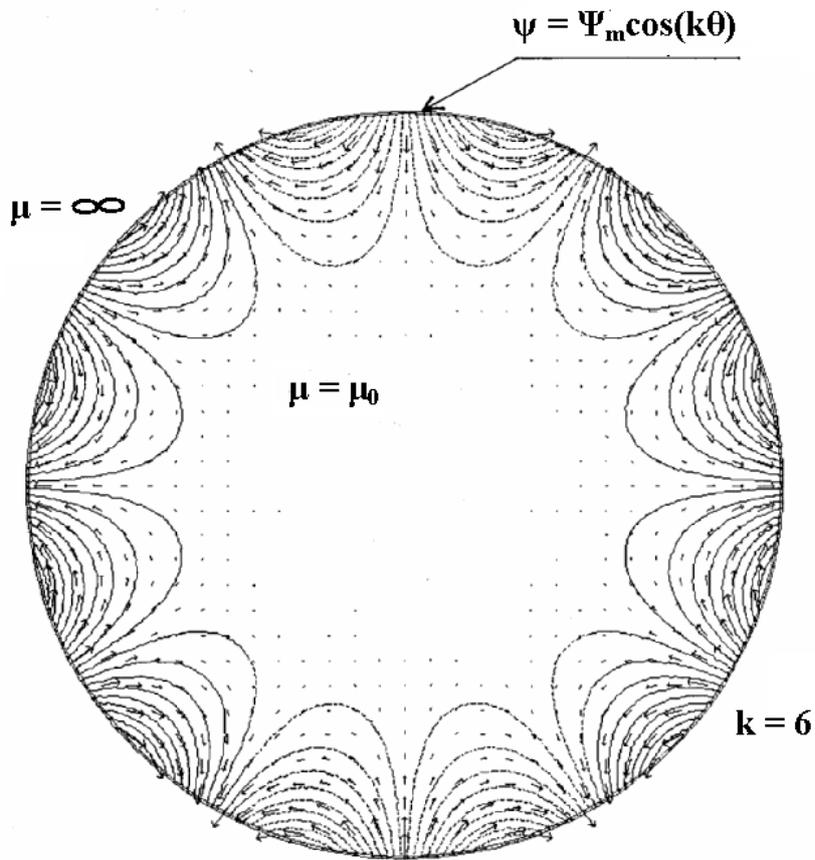


Рис. 8.10. Картина 12-полюсного поля в расточке статора при удаленном роторе

Домашнее задание. С помощью программы *FEMM* построить двухполюсное ($k = 2$) поле при отсутствии внутреннего сердечника.

Поле при отсутствии внешнего сердечника (поле за пределами ярма).

Поле за пределами ярма сердечника представляет интерес обычно в тех случаях, когда сталь его сильно насыщена или когда необходимо уменьшить влияние поля на персонал или на работу аппаратуры.

Радиус невозбужденного сердечника в этом случае стремится к бесконечности: $r_2 \rightarrow \infty$

Поле при отсутствии внешнего сердечника выглядит так:

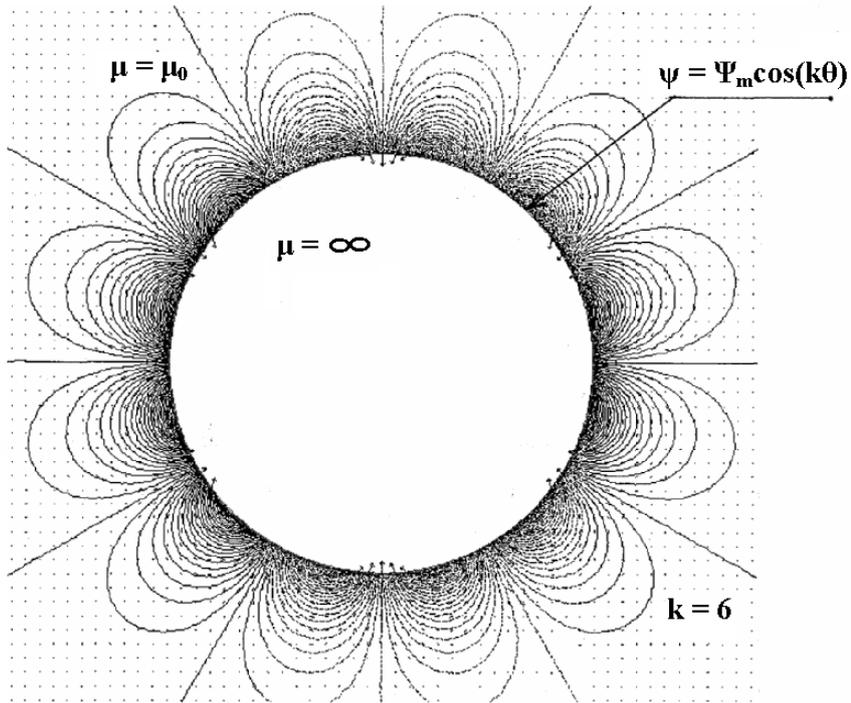


Рис. 8.11. Картина 12-полюсного поля во внешнем пространстве за пределами ядра цилиндрического сердечника

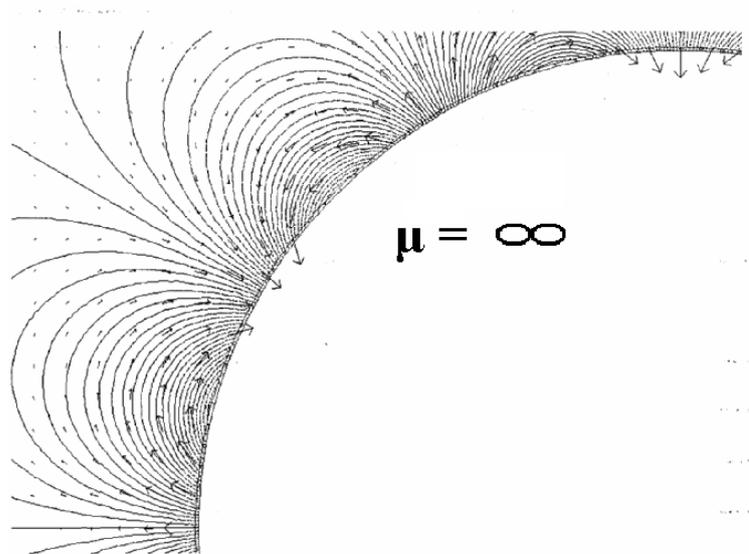


Рис. 8.12. Фрагмент поля, показанного на рис. 8.11, в большем масштабе

Предельным случаем при увеличении радиуса кривизны возбужденного сердечника является плоский сердечник с гармоническим распределением намагничивающей силы вдоль его поверхности (*линейный двигатель*). Если на сердечнике (в случае линейного двигателя он обычно называется *индуктором*) уложена многофазная обмотка переменного тока, создается *бегущее поле*. Металлический цилиндр, положенный на поверхность индуктора так, чтобы его продольная ось была перпендикулярна направлению движения поля, будет испытывать действие вращающего момента. Этот опыт описал в одной из своих популярных статей большой энтузиаст линейных двигателей проф. Э. Лайтвейт (*E. Lightweight*, Великобритания). Для объяснения этого явления Э. Лайтвейт предложил, построив картину поля индуктора для некоторого момента времени, двигать вдоль поверхности сердечника непрозрачную полосу с вырезанным в ней круглым отверстием в направлении, противоположном направлению движения поля. При этом стрелки силовых линий, нарисованные над поверхностью на расстоянии радиуса отверстия, будут последовательно появляться в отверстии, иллюстрируя действие вращающегося поля на цилиндр. Приведенный ниже рисунок воспроизводит идею опыта Э. Лайтвейта.

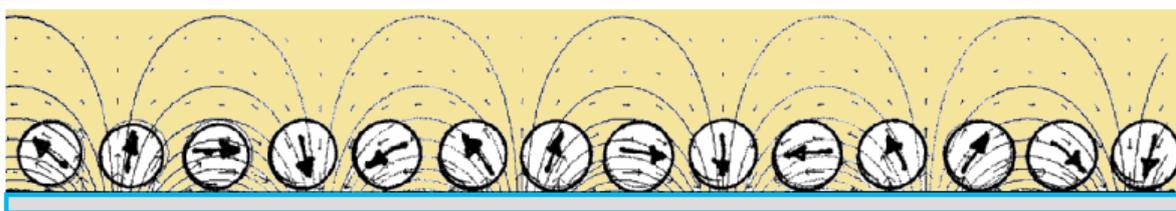


Рис. 8.13. Схема опыта, иллюстрирующего создание вращающегося момента, действующего на цилиндр, помещенный на поверхность индуктора линейного двигателя переменного тока (по статье Э. Лайтвейта)

Домашнее задание. С помощью программы *FEMM* смоделировать опыт Э. Лайтвейта.

Упрощение формул при малом зазоре

При анализе поля гармоника зазор будем считать малым в том случае, если он много меньше полюсного деления гармоника: $\delta \ll \tau_k$

Выразим поток на поверхности возбужденного сердечника через характерные размеры, воспользовавшись выражением (8.38):

$$|\Phi_{(r=r_1)}| = 2\mu\Psi_k \frac{1+v^{2k}}{1-v^{2k}} \quad (8.38a)$$

Учитывая, что $v = (r_2 / r_1)$, откуда $r_2 = r_1 \pm \delta$ и $v = 1 \pm \frac{\delta}{r_1}$,

получим путем разложения в ряд бинома Ньютона приближенное выражение:

$$v^{2k} = \left(1 \pm \frac{\delta}{r_1}\right)^{2k} = 1 \pm 2k \frac{\delta}{r_1} \pm 2k(k-1) \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{r_1}\right)^2 \pm \dots$$

и

$$v^{2k} \approx 1 \pm 2k \frac{\delta}{r_1}$$

Подставляя это выражение в (8.38a) с учетом того, что при малом зазоре $\tau_k = (\pi \cdot r_1) / k$, получим:

$$\Phi_{(r=r_1)} = \frac{2}{\pi} \mu \frac{\tau_k \Psi_k}{\delta},$$

что совпадает с формулой для потока через возбужденный сердечник при плоском зазоре.

Погрешность при замене криволинейного зазора плоским в общем случае

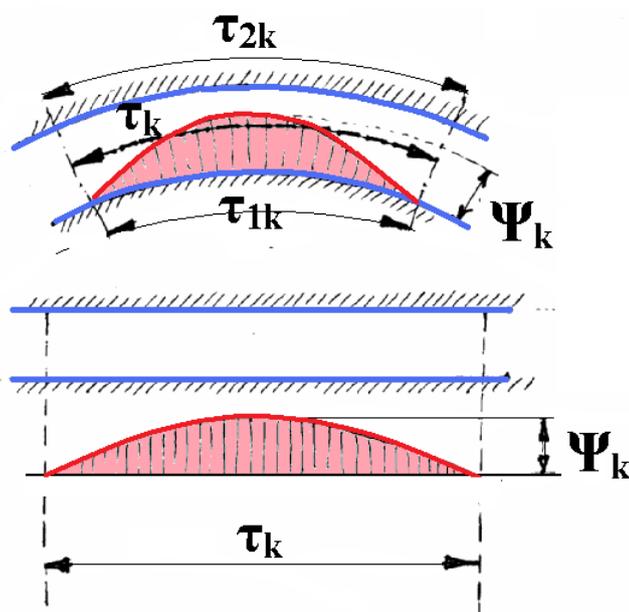


Рис. 8.14. Преобразование криволинейного зазора в плоский

При преобразовании зазора сохраним среднюю длину полюсного деления

$$\tau_k = \frac{\tau_{1k} + \tau_{2k}}{2}$$

и амплитуду гармоники скалярного магнитного потенциала

$$\Psi_k = \frac{i_{z,\max} \tau_k}{\pi} = idem.$$

Из последнего выражения следует, что при преобразовании зазора поверхностный ток, обеспечивающий распределение скалярного магнитного потенциала с заданной амплитудой, должен быть пересчитан:

$$i_{z,\max(r=\infty)} = \frac{i_{z,\max(r=r_1)} \cdot \tau_{1k}}{\tau_k}.$$

Погрешность при такой замене зазора получается не слишком большой даже при больших зазорах.

$$\left| \frac{\Phi_1 - \Phi_{1\infty}}{\Phi_1} \right| < \begin{cases} 0,05 & k=1 \\ 0,015 & k=2 \\ 0,005 & k=3 \end{cases}$$

Для напряженности поля погрешность получается несколько больше.

Погрешность для потока через поверхность невозбужденного сердечника также получается больше:

$$\left| \frac{\Phi_2 - \Phi_{2\infty}}{\Phi_2} \right| < \begin{cases} 0,05 & (\delta/\tau_k) \leq 0,2 \\ 0,10 & (\delta/\tau_k) \leq 0,3 \end{cases} \quad k=1 \\ \left. \begin{matrix} 0,05 & k=2 \\ 0,03 & k \geq 3 \end{matrix} \right\}$$

На этом закончим рассмотрение метода разделения переменных применительно к решению полевых задач. Полученные решения можно распространить на случай зубчатого зазора, если зубчатость учтена коэффициентом Картера (осуществлено приведение к гладкому зазору). Это подходит для тех случаев, когда мы не интересуемся полем в области раскрытия паза.

Уравнения линий поля с использованием функций φ и ψ

Ранее в декартовой системе координат были получены выражения для составляющих вектора напряженности магнитного поля:

$$H_x = \frac{B_x}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{B_y}{\mu} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Можно получить аналогичные выражения в цилиндрической системе координат:

$$\bar{H}_r = \frac{\bar{B}_r}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_r \bar{A} = \frac{1}{\mu} \bar{q}_r \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} r \right) = \frac{1}{\mu} \bar{q}_r \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = \bar{q}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

$$\bar{H}_\theta = \frac{\bar{B}_\theta}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot}_\theta \bar{A} = \frac{1}{\mu} \bar{q}_\theta \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \bar{q}_\theta \left(-\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\bar{q}_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

Здесь использовано выражение $\text{rot} \bar{A}$ в цилиндрических координатах:

$$\text{rot} \bar{A} = \bar{q}_r \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial z} \right) + \bar{q}_\theta \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \bar{q}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

В скалярной форме:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ H_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

Воспользовавшись выражениями для градиента функции в декартовой и цилиндрической системах координат, например:

$$\text{grad} \varphi = \bar{q}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

и

$$\text{grad} \varphi = \bar{q}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \bar{q}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \bar{q}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}; & H_r &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}; & H_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

Из этих простых выражений следует, в частности, что в декартовой системе координат для плоского поля

$$\left. \begin{aligned} \text{grad} \psi &= \nabla \psi = -H_x \bar{q}_x - H_y \bar{q}_y \\ \text{grad} \varphi &= \nabla \varphi = -H_y \bar{q}_x + H_x \bar{q}_y \end{aligned} \right\}.$$

Заметим, что скалярное произведение градиентов функций φ и ψ равно нулю:

$$(\text{grad} \psi \cdot \text{grad} \varphi) = (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi) = H_y H_x - H_x H_y = 0 \quad . \quad (8.44)$$

Это означает, что линии уровня функций ψ (эквипотенциали) и φ (силовые линии поля) в каждой точке области взаимно ортогональны.

Другими словами, линии уровня функций ψ и φ образуют ортогональную сетку.

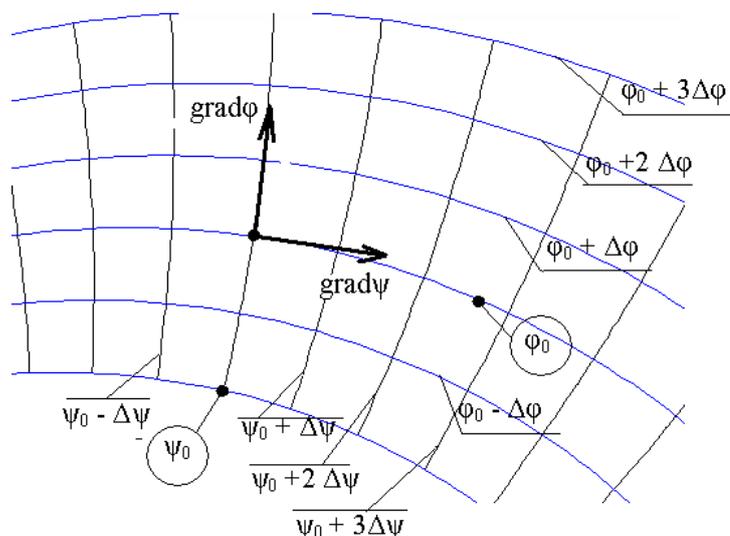


Рис. 8.15 Ортогональность эквипотенциалей и силовых линий магнитного поля

Это дает основание утверждать, что решение полевой задачи может быть получено графическим путем – последовательно подправляя картину поля, первоначально построенную приближенно, на основании интуиции, и следя за тем, чтобы семейства линий уровня функции потока и эквипотенциали образовывали четырехугольники, приближающиеся по форме к криволинейным квадратам, можно получить вполне приемлемую точность решения. В качестве примера на рис. 8.16 показаны две картины поля: одна из них построена вручную, а вторая – результат моделирования с помощью программы *FEMM*. Расхождение между значениями проводимости для участка поверхности сердечника, выделенного жирными линиями, определенными по обеим картинам поля – около 5%.

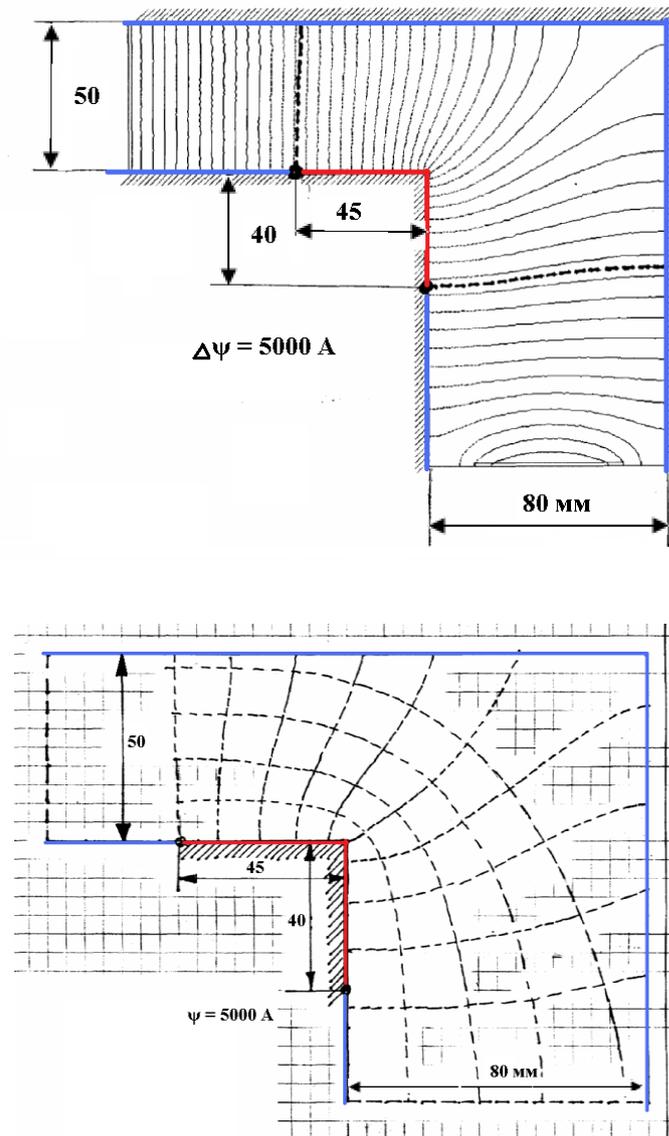


Рис. 8.16. Графическое решение полевой задачи – построение картины поля методом последовательных приближений

Уравнения линии уровня функции потока и эквипотенциальной линии, проходящих через точку.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) &= 0 \\ \psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

Восстановление функций φ и ψ по известному распределению поля

Выражения для дифференциалов функций в декартовой и в цилиндрической системах координат:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = -H_y dx + H_x dy \\ d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -H_x dx - H_y dy \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

$$\left. \begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta = -H_r dr - rH_\theta d\theta \\ d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\theta = -H_\theta dr + rH_r d\theta \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

Выражения для функций получаются после вычисления двойного интеграла, например:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y d\varphi = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y (-H_y dx) + H_x dy = \\ &= \int_{x_0}^x (-H_y)_{(y=y_0)} dx + \int_{y_0}^y H_{x(x=x)} dy \end{aligned} \quad (8.48)$$

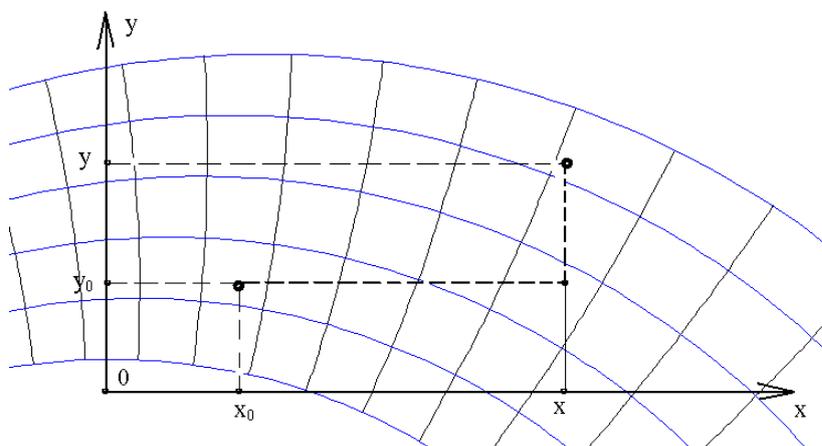
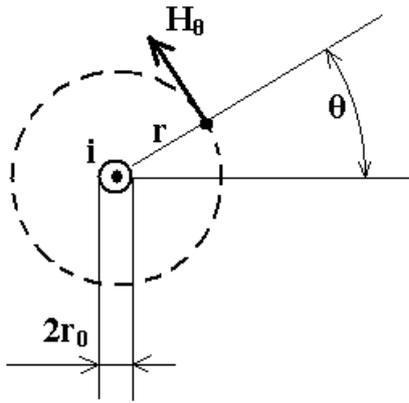


Рис. 8.17. Вычисление функции потока в точке (x, y) по известному ее значению в точке (x_0, y_0) и известному распределению напряженности магнитного поля

Пример. Определение функций φ и ψ для поля линейного тока

Поскольку линии поля в этом случае представляют собой окружности, вектор напряженности имеет только тангенциальную составляющую:

$$\bar{H} = H_\theta \bar{q}_\theta + 0 \cdot \bar{q}_r; \quad H_\theta = \frac{i}{2\pi r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$



Отыскивая выражение для функции потока, вначале проведем интегрирование по поверхности проводника от точки $(r = r_0, \theta = 0)$. Затем, достигнув угловой координаты точки, для которой ищется значение функции, выполним интегрирование, перемещаясь по радиальному направлению:

Рис. 8.18. К вычислению значений функций φ и ψ в точке (r, θ)

$$\varphi = \int_{\theta_0}^{\theta} H_r r d\theta \Big|_{r=r_0} - \int_{r_0}^r H_\theta dr \Big|_{\theta=0} = -\frac{i}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (8.49)$$

Здесь первый интеграл равен нулю, т.к. отсчет функции потока ведем от поверхности проводника, рассматривая только внешнее пространство:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} H_r r d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} r d\theta \Big|_{r=r_0} = \frac{1}{r_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta \Big|_{r=r_0} = \frac{1}{r_0} \int_{\theta_0}^{\theta} d\varphi \Big|_{r=r_0} = 0.$$

Таким же образом получим выражение для скалярного магнитного потенциала, имея в виду, что он не зависит от радиуса:

$$\psi = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = \quad (\text{см.}(8.43)) \quad = -\int_{\theta_0}^{\theta} r H_\theta d\theta = -\frac{i}{2\pi} \theta \quad (8.50)$$

Ранее этот результат уже был получен.

Комплексная потенциальная функция $w(z)$

При разработке математического аппарата мы уже ввели в рассмотрение несколько вспомогательных функций:

- векторный магнитный потенциал

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A},$$

- скалярный магнитный потенциал

$$\bar{H} = -grad\psi,$$

где \bar{H} - потенциальный вектор (напряженность магнитного поля),
- функцию потока

$$\varphi = \frac{1}{\mu} A_z = \frac{\Phi_0}{\mu}.$$

Введение вспомогательных функций позволяет для описания полевой задачи воспользоваться такими уравнениями математической физики, как, например, уравнения Лапласа и Пуассона, способы решения которых (как аналитические, так и численные) достаточно хорошо разработаны.

Составим еще одну вспомогательную функцию, - комплексного переменного, - которая также окажется нам весьма полезной:

$$w(z) = \varphi + j\psi, \quad (8.51)$$

где φ и ψ - определенные ранее функция потока и скалярного магнитного потенциала.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются *гармоническими* (не путать с гармоническими составляющими разложения периодической функции в ряд Фурье).

Если φ и ψ - гармонические функции, то $w(z) = \varphi + j\psi$ является *аналитической*, т.е. имеет однозначную производную:

$$w'(z) = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0, \arg(\Delta z) \in [0, 2\pi]} \left(\frac{\Delta w(z)}{\Delta z} \right) = \frac{dw(z)}{dz}. \quad (8.52)$$

Приращение независимой переменной в декартовой и цилиндрической системах координат:

$$dz = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dx + jdy = \bar{q}_x dx + \bar{q}_y dy \\ \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = e^{j\theta} dr + je^{j\theta} r d\theta = \bar{q}_r dr + \bar{q}_\theta d\theta \end{array} \right\}, \quad (8.53)$$

откуда единичные векторы (орты) в каждой из систем координат равны:

$$\bar{q}_x = 1; \quad \bar{q}_y = j; \quad \bar{q}_r = \bar{1} \cdot e^{j\theta}; \quad \bar{q}_\theta = j e^{j\theta} = \bar{1} \cdot e^{j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (8.54)$$

Производная $w'(z)$ не зависит от аргумента приращения dz , но выражения для $w'(z)$ при различных значениях аргумента получаются различными. Это позволяет получить важные соотношения – так называемые условия Коши-Римана:

$$w'(z) = \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} dz = dx, \quad \arg(dz) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ dz = jdy, \quad \arg(dz) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} - j \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right|^{*1)} \\ dz = e^{j\theta} dr, \quad \arg(dz) = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow e^{-j\theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + j \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big|^{*2)} \\ \left. \begin{array}{l} dz = e^{j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} r d\theta \\ \arg(dz) = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow e^{-j\theta} \left(\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} - j \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right) \Big|^{*3)} \end{array} \right\} (8.55)$$

$$*1) \quad \frac{d(\varphi + j\psi)}{jdy} = -j \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dy}$$

$$*2) \quad \frac{d(\varphi + j\psi)}{e^{j\theta} dr} = e^{-j\theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + j \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

$$*3) \quad \frac{d(\varphi + j\psi)}{e^{j\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} r d\theta} = \frac{d(\varphi + j\psi)}{j e^{j\theta} r d\theta}$$

Сравнивая действительные и мнимые части производной, взятой при различных приращениях dz , получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{array} \right\} (8.56) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{array} \right\} (8.57)$$

Эти соотношения называются условиями Коши-Римана.

Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789-1857) – французский математик, один из основателей теории аналитических функций, иностранный почетный член Петербургской АН (1831)

Риман (Riemann) Бернхард (1826-1866) – немецкий математик, положил начало геометрическому направлению в теории аналитических функций, создатель Римановой геометрии (1854).

Выражение напряженности магнитного поля через комплексную потенциальную функцию

Вектор напряженности магнитного поля на комплексной плоскости:

$$\vec{H} = -\text{grad}\psi = \left\{ \begin{array}{l} H_x + jH_y \\ -\bar{q}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} - \bar{q}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\bar{q}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} - \bar{q}_\theta \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} \end{array} \right\} \quad (8.58)$$

Составляющие вектора напряженности в рассматриваемых системах координат связаны друг с другом следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} H_x = H_r \cos\theta - H_\theta \sin\theta \\ H_y = H_r \sin\theta + H_\theta \cos\theta \end{array} \right\} \quad (8.59)$$

С помощью выражений (8.55) – (8.58) можно получить:

$$\vec{H} = -j w'^*(z) \quad (8.60)$$

Здесь звездочка означает сопряженный комплекс.

По форме (8.60) напоминает выражение напряженности магнитного поля через скалярный магнитный потенциал и это объясняет, почему функция названа комплексной *потенциальной* (иногда ее называют комплексным потенциалом).

Введя понятие комплексной потенциальной функции, т.е. перейдя к постановке и решению полевой задачи на комплексной плоскости, мы полу-

чили возможность использовать хорошо разработанные и весьма продуктивные методы теории функций комплексной переменной, в частности, метод конформных преобразований (от латинского *conformis* – подобный).