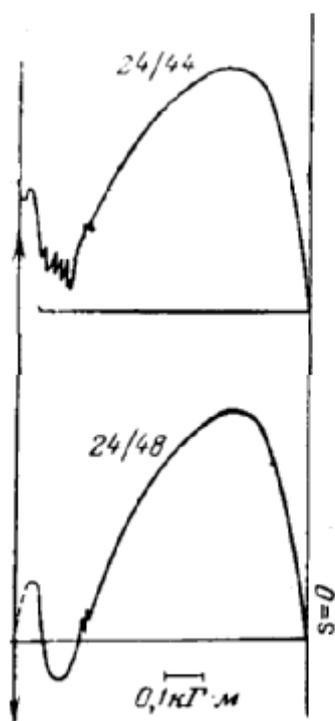


Раздел 12. Электромагнитные силы в магнитном поле

12.1. Практическое значение правильного расчета электромагнитных сил и вращающих моментов в электрических машинах

Чрезвычайно важно уметь правильно рассчитывать электромагнитные силы, возникающие в электрических машинах. Важно не только потому, что необходимо рассчитывать прочность конструкции, надежность крепления, уровень вибраций и шумов, но и потому, что этого требует расчет главных характеристик машины, например, механических характеристик двигателей.

На рисунке показаны механические характеристики четырехполюсно-



го асинхронного двигателя мощностью 1,1 кВт, имеющего 24 паза на статоре и в одном случае 48 пазов на роторе, а в другом 44. Пример взят из книги Б. Геллера и В. Гаматы «Дополнительные поля, моменты и потери мощности в асинхронных машинах» (изд. «Энергия», М.-Л., 1964, пер. с чешского, есть второе издание). Характеристики получены экспериментально Мёллером в 1930 г.

В обоих вариантах двигатель обладает очень плохими пусковыми свойствами (при сочетании чисел зубцов 24/44 он и

вообще не может разогнаться).

Приведенный пример показывает, как важно уметь рассчитывать электромагнитные силы и моменты, связанные не только с основным рабочим процессом машины, но и дополнительные, часто называемые *паразит-*

ными, силы и моменты, связанные с высшими пространственными и временными гармониками.

Приведем еще пример того, как важно правильно рассчитывать и контролировать в процессе эксплуатации электромагнитные силы, возникающие в электрических машинах.

В послевоенные годы крупное электромашиностроение развивалось быстрыми темпами – единичные мощности основных производителей электрической энергии – турбогенераторов, быстро нарастали. Применение водородного и непосредственного водяного охлаждения позволяло изготавливать машины мощностью 500, 800, 1000 и более МВт. Однако прогресс в этом направлении тормозился невозможностью обеспечить достаточно прочное и жесткое крепление лобовых частей обмоток статоров. На лобовые части статорных обмоток крупных машин действуют громадные электромагнитные силы, особенно при внезапных коротких замыканиях. Потребовались очень большие усилия инженеров-расчетчиков и экспериментаторов во всем электротехническом мире, чтобы успешно решить эту проблему. Крупнейшие по тому времени фирмы, производящие турбо- и гидрогенераторы, *Westinghouse*, *General Electric*, *ASEA*, *Brown Bowery*, «Электросила» и др. вложили большие средства в разработку методов расчета и выполнение многочисленных экспериментов на полномасштабных физических моделях торцевых зон генераторов.

В последнее время широкое применение находят высокоскоростные электрические машины, имеющие частоты вращения до 100 – 200 тысяч оборотов в минуту. Часто в таких машинах используется так называемый электромагнитный подвес – бесконтактные опоры, в которых вес ротора или движущейся вторичной части линейного двигателя компенсируется действием электромагнитных сил. Излишне говорить о том, что для обеспечения устойчивой надежной работы таких опор требуется умение точно рассчитать не только мгновенные значения сил, но и характер их изменения во

времени при учете изменения взаимного положения перемещающихся друг относительно друга частей машины.

12.2. Объемные и поверхностные электромагнитные силы

Рассмотрим объем V , состоящий из двух объемов, один из которых является вложенным в другой : $V = V_a + V_b$. Объемы отличаются друг от друга по своим свойствам: $\mu_a \neq \mu_b$. Объем V охвачен внешней поверхностью S . Поверхность S_{ab} является граничной между объемами V_a и V_b .

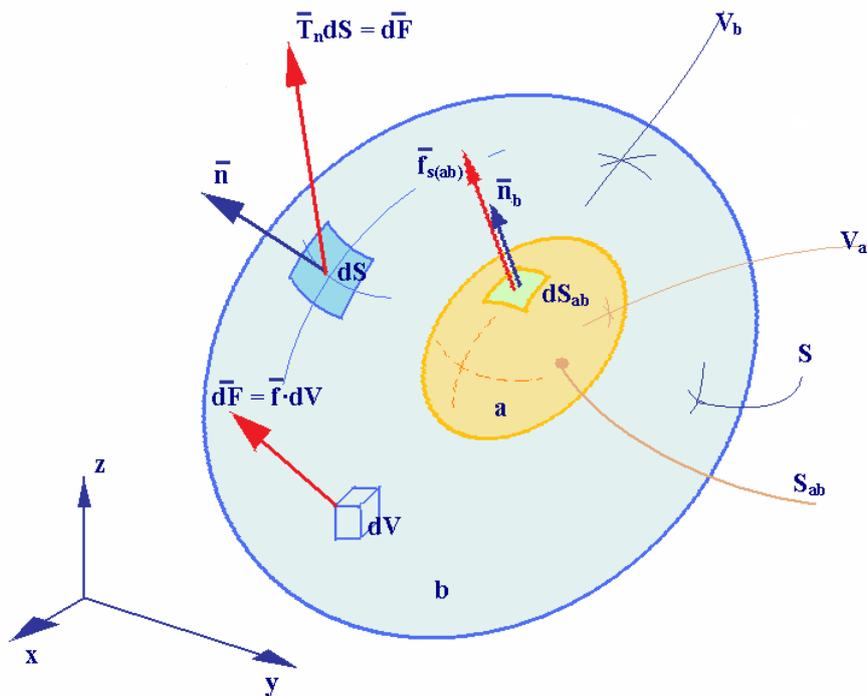


Рис. 12.1. Объемные и поверхностные удельные силы

Результирующая электромагнитная сила, действующая на всю систему, может быть рассчитана различным образом. Во-первых, как результат действия объемных сил и сил, действующих на поверхности S_{ab} :

$$F = \int_V \vec{f} dv + \int_{S_{ab}} \vec{f}_{s(ab)} dS_{ab} \quad (12.1)$$

Во-вторых, как результат действия поверхностных сил на поверхности S :

$$F = \int_S \bar{T}_n dS, \quad (12.2)$$

где \bar{f} – объемная плотность электромагнитных сил (удельная объемная сила); \bar{f}_s – поверхностная плотность электромагнитных сил (удельная поверхностная сила); \bar{T}_n – натяжение (тоже удельная поверхностная сила).

12.2.1. Объемная плотность электромагнитных сил

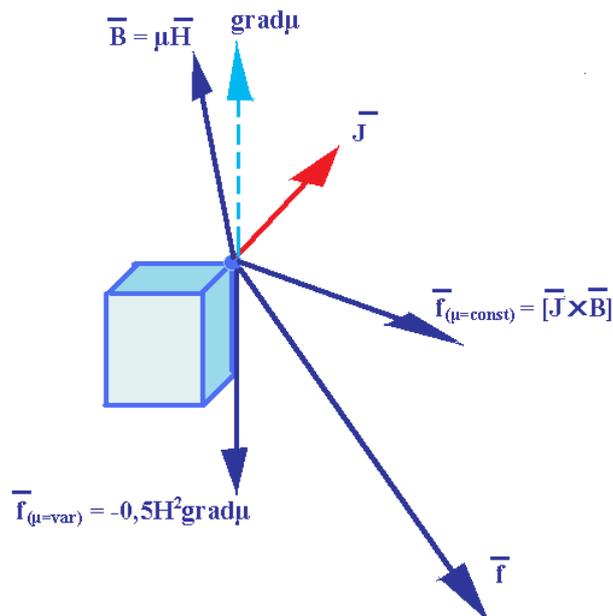


Рис. 12.2. Объемная удельная сила

Удельная объемная сила складывается из двух составляющих: одна из них обусловлена взаимодействием тока (заданного плотностью тока J) с внешним полем (вектор индукции \bar{B} предполагается известным) при постоянной магнитной проницаемости среды:

$$\bar{f}_{(\mu=\text{const})} = [\bar{J}\bar{B}], \quad (12.3)$$

а вторая составляющая обусловлена изменением магнитной проницаемости среды:

$$\bar{f}_{(\mu=\text{var})} = -0,5H^2 \text{grad} \mu \quad (12.4)$$

Изменение магнитной проницаемости может быть вызвано неравномерным распределением индукции и особенно явно проявляется при насыщении стали. Неравномерность магнитной проницаемости возникает также при проникновении переменного магнитного поля, изменяющегося с достаточно большой частотой, в массивный ферромагнетик.

12.2.2. Натяжения в магнитном поле (максвелловские натяжения)

Рассматривая электромагнитные силы, Дж. К. Максвелл предложил следующую формулу для удельной поверхностной силы, действующей на поверхности, в каждой точке которой вектор индукции определен по величине и направлению:

$$\bar{T}_M = \frac{1}{\mu} (\bar{B} \cdot B_n - 0,5B^2 \cdot \bar{n}) \quad (12.5)$$

где $\mu = \mu_0 \mu_r$.

Часто эту удельную силу называют максвелловским натяжением, мы для обозначения максвелловских натяжений будем использовать нижний индекс «M».

Натяжение \bar{T}_M можно представить в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих:

$$\bar{B} = \bar{n}B_n + \bar{\tau}B_\tau \quad \text{и} \quad B^2 = B_n^2 + B_\tau^2.$$

После подстановки в (12.5) получим:

$$\bar{T}_M = \frac{1}{\mu} [(\bar{n}B_n + \bar{\tau}B_\tau)B_n - 0,5(B_n^2 + B_\tau^2)\bar{n}] = \bar{T}_{Mn} + \bar{T}_{M\tau} \quad (12.6)$$

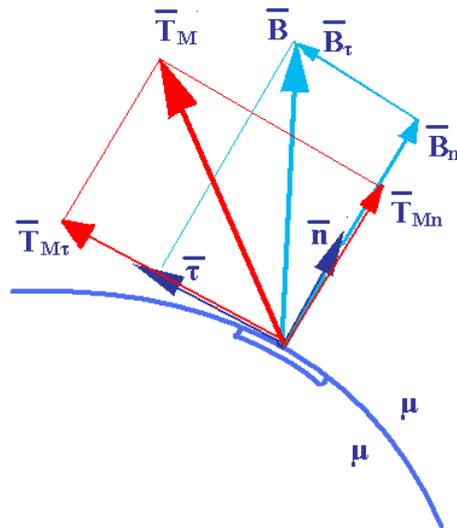


Рис. 12.3. Векторы индукции и максвелловского натяжения

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{Mn} &= T_{Mn} \cdot \bar{n} = \frac{B_n^2 - B_\tau^2}{2\mu} \bar{n}, & \frac{H}{M^2} \\ \bar{T}_{M\tau} &= T_{M\tau} \cdot \bar{\tau} = \frac{B_n \cdot B_\tau}{2\mu} \bar{\tau}, & \frac{H}{M^2} \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Отметим, что $\bar{T}_{M\tau} \neq 0$ только тогда, когда одновременно не равны нулю обе составляющих индукции.

12.2.3. Поверхностная плотность электромагнитных сил

Удельная поверхностная сила, действующая на поверхности раздела двух сред с различными свойствами, всегда направлена в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью.

$$\bar{f}_s = 0,5 \bar{n}_b \left[H_\tau^2 (\mu_a - \mu_b) + B_n^2 \left(\frac{1}{\mu_b} - \frac{1}{\mu_a} \right) \right] \quad (12.8)$$

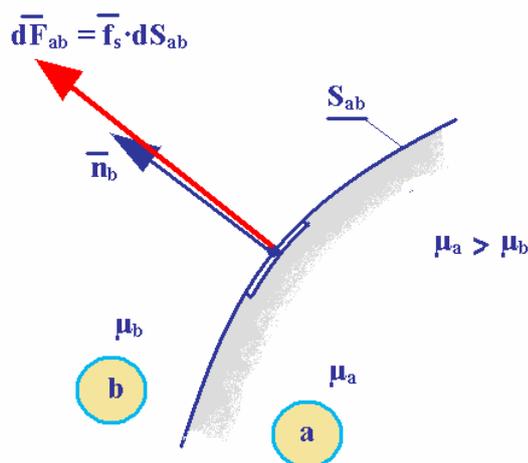


Рис. 12.4. Удельная поверхностная сила на поверхности раздела двух сред

Рассмотрим случай, когда тело окружено оболочкой из материала с постоянной магнитной проницаемостью (например, воздушной) и при этом в этой оболочке нет токов.

Поскольку объемные силы в оболочке не возникают,

$$\bar{F} = \int_{V_a} \bar{f} dv + \int_{S_{ab}^{(ab)}} \bar{f}_s dS_{ab} = \int_S \bar{T}_M dS \quad (12.9)$$

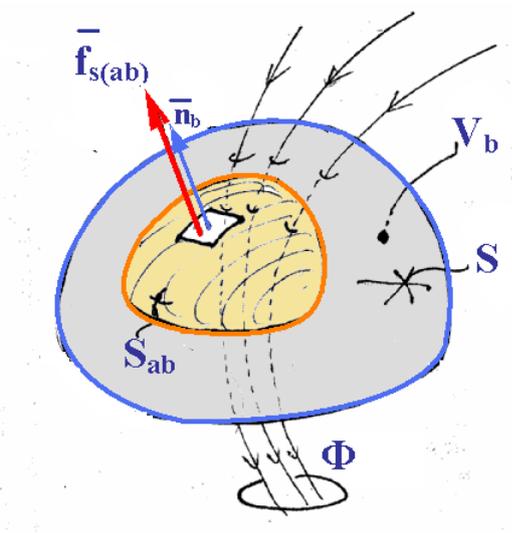


Рис. 12.5. Тело с поверхностью S_{ab} , окруженное оболочкой с поверхностью S

Вывод: какой бы воздушной оболочкой мы ни окружали тело (например, ротор электрической машины), интегрируя по ее поверхности максвел-

ловские натяжения, мы получим один и тот же результат – силу, действующую на тело.

Поверхностная удельная сила \bar{f}_s возникает на поверхности раздела двух сред только в том случае, если магнитной проницаемости этих сред различны.

В качестве примера рассмотрим силы, действующие на поверхность зубца сердечника с бесконечной магнитной проницаемостью.

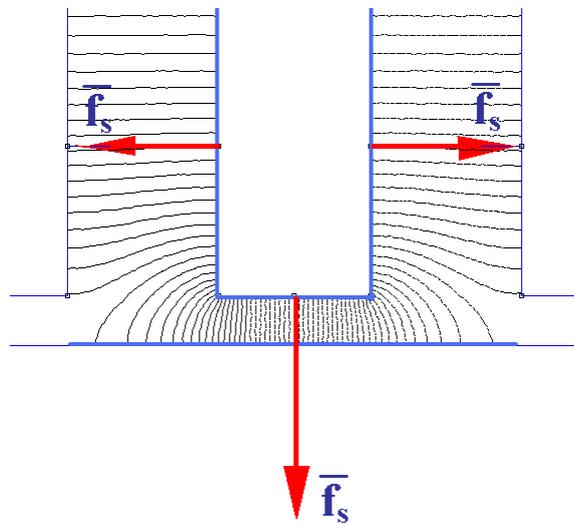


Рис. 12.6. Силы, действующие на поверхность зубца сердечника

$$\bar{f}_s = 0,5\bar{n}_b \left[H_\tau^2 (\infty - \mu_0) + B_n^2 \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\infty} \right) \right] \rightarrow$$

$$\bar{f}_s = 0,5\bar{n}_b \cdot B_n^2 \frac{1}{\mu_0} \quad (12.10)$$

На рисунке показано, что в этом случае поверхностная сила действует всегда по нормали к поверхности сердечника и направлена в сторону воздушного пространства.

12.3. Электромагнитные силы, действующие на область паза с током при наличии внешнего униполярного (четного) поля

Обозначения размеров и допущения будем использовать те же, что и при рассмотрении конформных преобразований.

Необходимо найти силы, действующие на область паза при произвольном положении тока i в пазу (в точке $z_i = x_i + jy_i$, где $y_i = h_i$). Паз расположен во внешнем униполярном поле, созданном скалярным магнитным потенциалом Ψ_c .

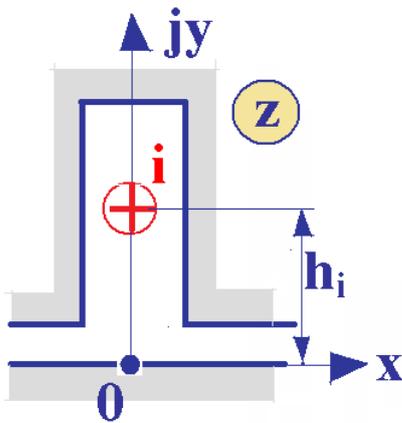


Рис. 12.7. К определению силы, действующей на линейный ток, расположенный на оси паза

Поскольку задача линейна, нечетное поле тока в пазу B_{si} и поле, созданное потенциалом Ψ_c (четное поле B_c), могут быть рассчитаны независимо, а результирующее поле найдено как сумма этих полей:

$$\bar{B} = \bar{B}_{si} + \bar{B}_c$$

Четное поле с индукцией \bar{B}_c было рассмотрено ранее (в плоскости t – поле двух намагниченных пластин с расстоянием $a = (\delta/b)^2$

между ними, силовые линии в области t – эллипсы):

$$w_c = \frac{\Psi_c}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{2t}{a} - 1 \right)$$

$$H_c = |H_c| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{\Psi_c}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}}$$

При $t = \infty$, $x = \infty$:

$$B_c = \mu_0 H_c = \frac{\mu_0 \Psi_c}{\delta}.$$

Найдем индукцию четного поля в точке расположения тока (на оси паза).

$$z_i = x_i + jy_i; \quad x_i = 0, \quad y_i = h_i$$

$$B_{ci} = \mu_0 H_{ci} = \frac{\mu_0 \Psi_c}{\delta} \sqrt{\frac{t_i}{t_i + 1}} = B_c \sqrt{\frac{t_i}{t_i + 1}}, \quad (12.11)$$

где $t_i = u_i$ - координата точки A_i , в которой задан ток в плоскости t .

Таким образом, для вычисления индукции B_{ci} необходимо решить уравнение преобразования Шварца-Кристоффеля относительно t . Ранее было замечено, что найти требуемое аналитическое решение не удастся, и для определения координаты t_i приходится решать нелинейное уравнение или прибегать к вычислениям по методу последовательных приближений.

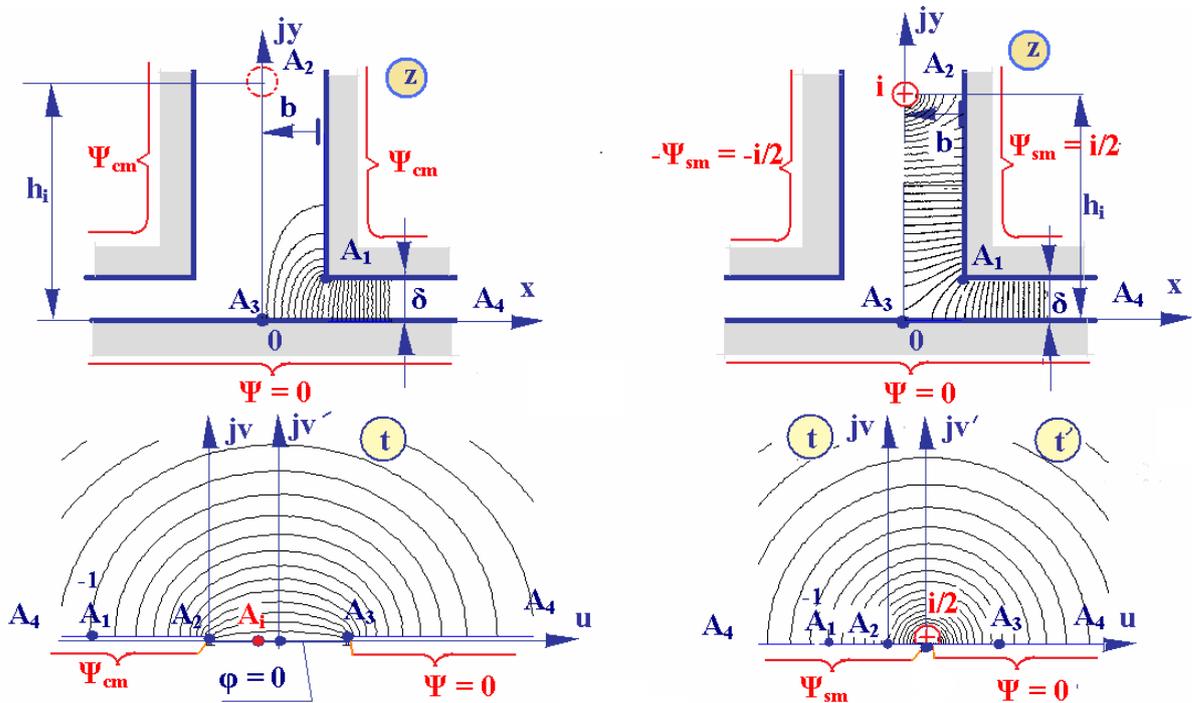


Рис. 12.8. К определению индукции в месте расположения тока в пазу

В комплексной плоскости t' нечетное поле описывается комплексной потенциальной функцией

$$w_s = \frac{\Psi_s}{\pi} \ln\left(\frac{t'}{a}\right) = \frac{i}{2\pi} \ln\left(\frac{t'}{a}\right).$$

В комплексной плоскости t , координата в которой связана с координатой плоскости t' простым преобразованием $t = t_i + t'$, комплексная потенциальная функция выражается соответственно:

$$w_s = \frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{t - t_i}{a} \right).$$

Линии поля в этом случае представляют собой окружности.

Напряженность нечетного поля в плоскости z :

$$H_s = \left| \frac{dw_s}{dz} \right| = \left| \frac{dw_s}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{i \cdot t}{2\delta(t - t_i)} \sqrt{\frac{t - a}{t + 1}}. \quad (12.12)$$

В (12.12) использовано:

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{\pi t}{\delta} \sqrt{\frac{t - a}{t + 1}}$$

и

$$\left| \frac{dw_s}{dt} \right| = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(t - t_i)}.$$

При $x \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ поле становится равномерным и напряженность поля и индукция принимают максимальные значения:

$$H_{sm} = \frac{i}{2\delta} = \frac{\Psi_s}{\delta}$$

и

$$B_{sm} = \mu_0 H_s = \frac{\mu_0 i}{2\delta} = \frac{\mu_0 \Psi_s}{\delta}.$$

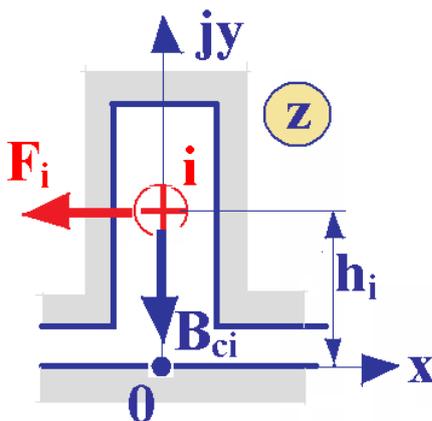


Рис. 12.9. Направление силы, действующей на ток в пазу

Сила, действующая на область паза, складывается из силы, действующей на ток во внешнем поле с индукцией в месте расположения тока B_{ci} , и сил, действующих на границы области задачи, т.е. на стенки левого и правого зубцов. Определим силу, действующую на проводник, проинтегрировав удельную объемную силу по объему, ограниченному цилиндрической поверхностью, охватывающей провод:

$$F_i = \int_V \bar{f} dV .$$

Объем провода при единичной его длине: $V = 1 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 1 \cdot S$ и $dV = 1 \cdot dS$. Внутри объема $\bar{f} = \text{const}$.

$$F_i = 1 \cdot \int_S \bar{f} dS = \bar{f} \int_S dS = \bar{f} S .$$

Но

$$\bar{f} = [\overline{JB}_{ci}] - 0,5 H_{ci}^2 \cdot \mathbf{grad} \mu = [(-J \bar{q}_z) \times (-B_{ci} \bar{q}_y)] = -JB_{ci} \bar{q}_x$$

и

$$F_i = \bar{f} S = -i B_{ci} \bar{q}_x \quad . \quad (12.13)$$

При выводе (12.13) учтено, что

$$\mathbf{grad} \mu = 0 \quad \text{и} \quad [\bar{q}_z \times \bar{q}_y] = -\bar{q}_x .$$

Подставив в (12.13) выражение для индукции внешнего (четного) поля в точке приложения тока (12.11), получим

$$F_i = -\bar{q}_x i B_{cm} \sqrt{\frac{t_i}{t_i + 1}} . \quad (12.14)$$

Для определения силы \bar{F}_c , действующей на сердечник, в котором вы-

полнен паз с током, охватим сердечник

поверхностью

$$S = 233'2'4'5'54$$

Для определения силы, действующей **в направлении оси x**, достаточно рассмотреть участки поверхности сердечника 45 и 4'5' (как было показано, при условии $\mu_c = \infty$ поверхностная удельная

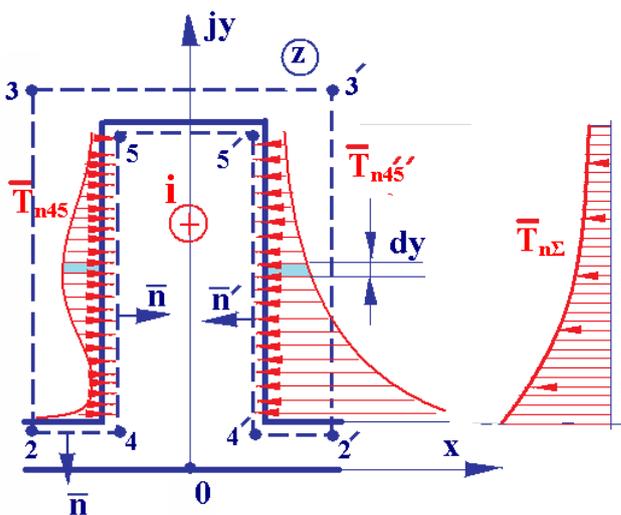


Рис. 12.10. К определению силы, действующей на стенку паза

сила направлена по нормали к поверхности стального сердечника).

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{M45} &= 0,5\mu_0 H_{n45}^2 \bar{n} = 0,5\mu_0 H_{n45}^2 \cdot \bar{q}_x \\ \bar{T}_{M45'} &= 0,5\mu_0 H_{n45'}^2 \bar{n} = -0,5\mu_0 H_{n45'}^2 \cdot \bar{q}_x \end{aligned} \right\}, \quad (12.15)$$

где

$$H_{n45} = (H_c - H_s) \Big|_{y=\delta}^{y=\infty}$$

$$H_{n45'} = (H_c + H_s) \Big|_{y=\delta}^{y=\infty}.$$

Различие в эпюрах нормальных сил, действующих на левую и правую стенки паза, показывает, что эти силы различны.

Суммарная сила, действующая на сердечник в направлении оси x :

$$\bar{T}_{M45}^{\Sigma} = \bar{T}_{M45} + \bar{T}_{M45'} = -2\mu_0 H_c H_s \bar{q}_x \Big|_{y=\delta}^{y=\infty} \quad (\text{от точки } A_1 \text{ до точки } A_2),$$

причем

$$\left. \begin{aligned} H_s &= \frac{i \cdot t}{2\delta(t - t_i)} \sqrt{\frac{t - a}{t + 1}} \\ H_c &= \frac{\Psi_c}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t + 1}} \end{aligned} \right\},$$

где t изменяется в пределах от -1 до нуля.

Суммарная сила, действующая на сердечник:

$$\begin{aligned} \bar{F}_c &= \int_S \bar{T}_{Mn} dS = \int_{y=\delta}^{\infty} \bar{T}_{M45'} dy + \int_{y=\delta}^{\infty} \bar{T}_{M45} dy = \\ &= \int_{y=\delta}^{\infty} \bar{T}_{M45}^{\Sigma} dy = -\frac{\mu_0 i \Psi_c \bar{q}_x}{\delta^2} \int_{y=\delta}^{\infty} \frac{t \sqrt{t(t - a)}}{(t + 1)(t - t_i)} dy \end{aligned} \quad (12.16)$$

Заметим, что

$$\text{при } y = \delta \quad t = -1 \quad (\text{точка } A_1)$$

$$\text{при } y = \infty \quad t = 0 \quad (\text{точка } A_2)$$

и, воспользовавшись уравнением Шварца-Кристоффеля:

$$dy = \frac{j dy}{j} = \frac{dz}{j} = \frac{\delta \sqrt{t + 1}}{j\pi \cdot t \sqrt{t - a}} dt,$$

найдем \bar{F}_c :

$$\begin{aligned}
\bar{F}_c &= -\frac{\mu_0 i \Psi_c}{\delta^2} \frac{\delta}{j\pi} \int_{t=-1}^0 \frac{t\sqrt{t(t-a)}}{(t+1)(t-t_i)} \frac{\sqrt{t+1}}{t\sqrt{t-a}} dt = \\
&= -\frac{\mu_0 i \Psi_c}{j\delta\pi} \bar{q}_x \int_{t=-1}^0 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} \frac{dt}{(t-t_i)} = -\frac{\mu_0 i \Psi_c}{\delta} \bar{q}_x \left(1 - \sqrt{\frac{t_i}{t_i+1}}\right) = \\
&= -iB_{cm} \bar{q}_x \left(1 - \sqrt{\frac{t_i}{t_i+1}}\right)
\end{aligned}$$

Полная сила, действующая на все пазовое деление сердечника (на единицу длины в направлении оси z):

$$\bar{F}_n = \bar{F}_i + \bar{F}_c = -iB_{cm} \bar{q}_x \quad (12.17)$$

Полученное значение силы, действующей в тангенциальном направлении на пазовое деление сердечника при наличии тока в пазу, совпадает с тем, которое ранее было получено при интегрировании максвелловских напряжений вдоль контура, проведенного в воздушном зазоре и охватывающего паз вместе с содержащимся в нем током. Однако при выводе (12.17) были получены выражения для составляющих полной силы – силы, действующей на проводник с током (или проводники, если в пазу находится не один провод, а катушечная сторона), и силы, действующей на стальной сердечник. Как следует из полученных выражений, соотношение между этими составляющими полной силы существенно зависит от глубины погружения провода в паз, и, если, как это обычно бывает, провод погружен в паз достаточно глубоко, **большая часть электромагнитной силы, действующей на пазовое деление, приложена к зубцам**. Таким образом, при размещении обмотки достаточно глубоко в пазах сердечника механические напряжения в корпусной изоляции снижаются.

Заметим, что

$$\bar{F}_i = \bar{F}_n \sqrt{\frac{t_i}{t_i+1}}.$$

Если принять за базовое значение полную силу \bar{F}_n , то в относительных единицах сила, действующая на провод с током, равна

$$F_{*i} = \frac{\bar{F}_i}{\bar{F}_n} = \sqrt{\frac{t_i}{t_i + 1}} = f\left(\frac{h_i}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) \quad (12.18)$$

Пример. Поместим ток на поверхности гладкого сердечника (в точке A_3 , для которой $x_i = 0$, $y_i = 0$, $t_i = t_3 = a = (\delta/b)^2$). Тогда

$$F_{*i} = \sqrt{\frac{a_i}{a_i + 1}} \text{ и при } b = \delta, \text{ т.е. при } a = 1, \quad F_{*i} = 0,707. \text{ Иными словами,}$$

к току в этом случае приложено усилие, составляющее около 71 процентов от полной силы, действующей на зубцовое деление.

Расчеты показывают, что уже при небольшом погружении в паз сила F_{*i} становится малой по сравнению с полной. Приведенная ниже таблица составлена для пазов, открытия которых вдвое больше зазора: $b = \delta$.

$h_{*i} = h_i / \delta$	0	1	2	3	4
F_{*i}	0,707	0,480	0,150	0,025	0,005
F_{*c}	0,293	0,520	0,850	0,975	0,995