

Раздел 15. Расчет интегральных величин (тока, потока, электрического и магнитного сопротивлений) для тел произвольной формы при резко выраженном поверхностном эффекте

15.1. Условия при постановке задач

Результаты анализа переменного поля в полупространстве могут быть распространены на тела произвольной формы, в которых наблюдается резко выраженный поверхностный эффект. К таким телам относятся такие, *размеры сечения и длина которых много больше глубины проникновения поля*:

$$l_i \gg \Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu}}.$$

Эти расчеты имеют большое практическое значение – для определения параметров массивных (нешихтованных) роторов и потерь в них и в таких элементах конструкции, как станины, подшипниковые щиты, бандажные кольца роторов турбогенераторов, массивные полюсные наконечники явнополюсных машин, стенки баков, шпильки и крепежные элементы ярем трансформаторов и т.д.

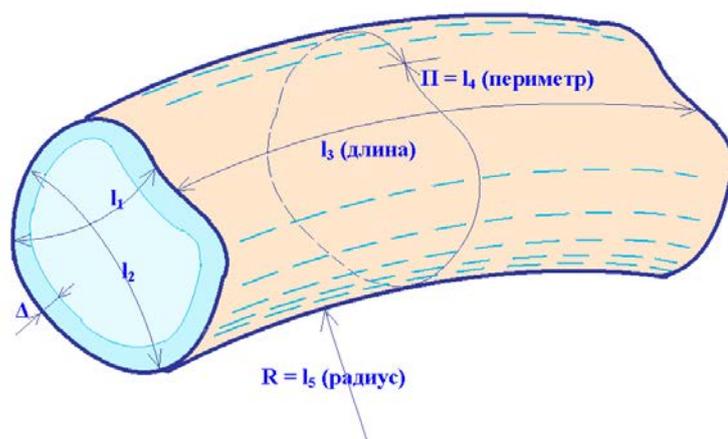


Рис. 15.1. Характерные размеры массивного бруса

Обычно достаточно, чтобы $l_i \geq 6\Delta$.

15.2. Расчет тока I_m в брус с произвольной формой сечения при резко выраженном поверхностном эффекте

Считаем, что любое нормальное сечение к оси тела по всей длине бруса остается постоянным.

Систему координат ориентируем таким образом, чтобы можно было применить выражения, полученные при рассмотрении поля в проводящем магнитном полупространстве.

Относительно внешнего источника: разность электрических потенциалов может создаваться как индуктированной ЭДС, так и приложенным напряжением.

$$\mathcal{E}_m = -j\omega\Phi_m - \text{индуктированная ЭДС.}$$

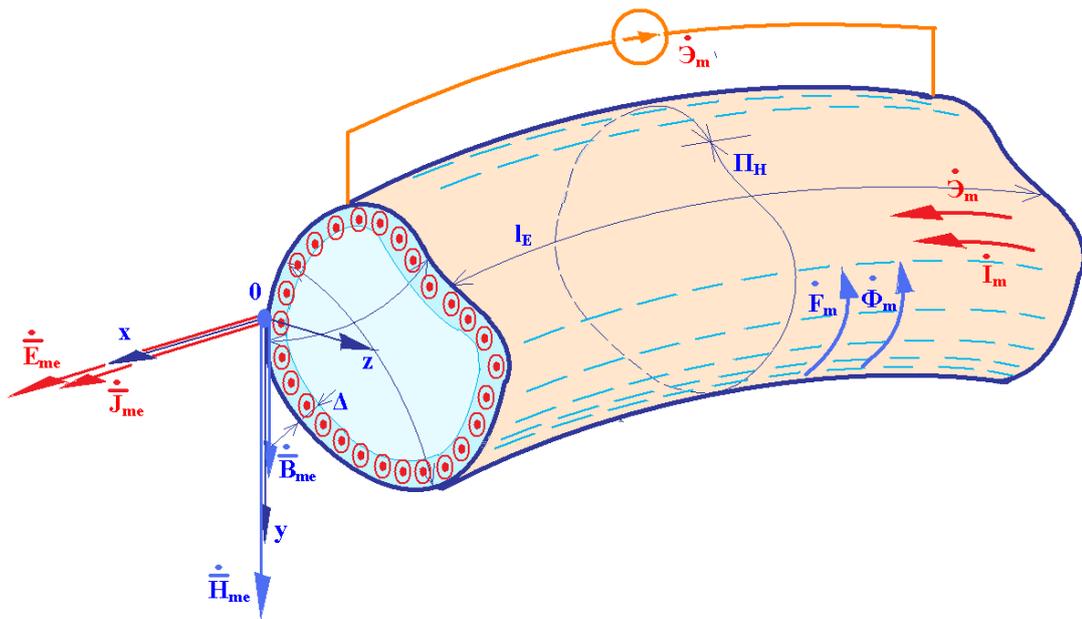


Рис. 15.2. Задача о расчете тока в массивном брус

Считается заданным:

- ЭДС (или напряжение) на длине l_E ;
- размеры тела: Π_H и l_E , форма сечения: l_1 и l_2 ;

- частота f ;
- свойства материала: γ и μ .

Найти:

- ток I_m и электрическое сопротивление Z_l (Ом);
- величины поля: $H_{me}, B_{me}, E_{me}, J_{me}, \Phi_m, F_m$;
- выяснить, во сколько раз увеличится ток при отсутствии поверхностного эффекта (для $f = 0$ при том же напряжении $U_m = \mathcal{E}_m$).

Решение.

1) Проверка условия для всех размеров:

$$l_i \geq 6\Delta = 6\sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}}.$$

2) При резко выраженном поверхностном эффекте

$$R_l = X_l = \frac{l_E}{\Pi_H \Delta \gamma}, \quad Z_l = \frac{l_E(1+j)}{\Pi_H \Delta \gamma}, \quad |Z_l| = \frac{l_E \sqrt{2}}{\Pi_H \Delta \gamma}.$$

При отсутствии поверхностного эффекта (т.е. при постоянном токе):

$$Z_{l0} = \frac{l_E}{S \cdot \gamma},$$

где S – площадь поперечного сечения бруса.

Токи в переменном и стационарном полях:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z_l}, \quad I_{m0} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z_{l0}}.$$

Напряженность электрического поля и плотность тока на поверхности бруса:

$$E_{me} = \frac{\mathcal{E}_m}{l_E}, \quad J_{me} = \gamma E_{me}.$$

Напряженность магнитного поля и индукция на поверхности бруса:

$$H_{me} = \frac{J_{me}}{|\alpha|} = \frac{J_{me}}{|(1+j)k|} = \frac{J_{me} \cdot \Delta}{\sqrt{2}}$$

или

$$H_{me} = \frac{I_m}{\Pi_H} = \frac{F_m}{\Pi_H},$$

где

$$I_m = J_{me} \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \Pi_H \quad \text{и} \quad I_m = H_{me} \cdot \Pi_H.$$

$$B_{me} = \mu H_{me}.$$

3) Теперь можно рассчитать потери:

$$\int_V \frac{J_m^2}{2\gamma} dV = P = \Pi_H l_E \int_0^\infty \frac{J_m^2}{2\gamma} dz = \Pi_H l_E \int_0^\infty \frac{J_{me}^2 e^{-2kz}}{2\gamma} dz =$$

$$= \frac{J_{me}^2 \Pi_H l_E (-1)}{(2\gamma)(-2k)} = \frac{J_{me}^2 (\Pi_H l_E \Delta)}{4\gamma} = \frac{J_{me}^2 V_\Delta}{4\gamma},$$

где V_Δ - объем поверхностного слоя всего бруса.

При выводе выражения для расчета потерь использовано:

$$\int_0^\infty e^{-2kz} dz = \frac{1}{(-2k)} \int_0^\infty e^{-2kz} d(-2kz) = \frac{1}{(-2k)} [e^{-2k \cdot \infty} - e^{-2k \cdot 0}] = \frac{(-1)}{(-2k)}.$$

Полезно представить развертку поверхностного слоя бруса в декартовой системе координат при том же направлении осей, которое было принято нами при изучении проникновения поля в полупространство (см. рис. 15.3).

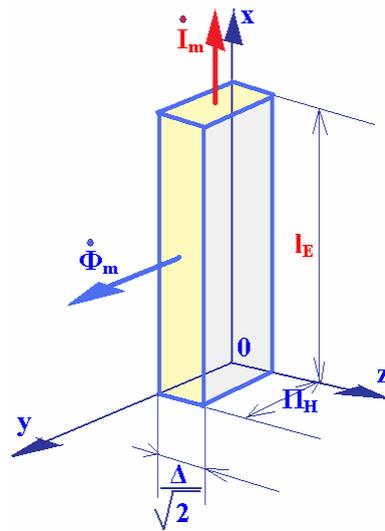


Рис. 15.3. Развертка массивного бруса в декартовой системе координат

15.3. Расчет магнитного потока Φ_m в брус с произвольной формой сечения при резко выраженном поверхностном эффекте

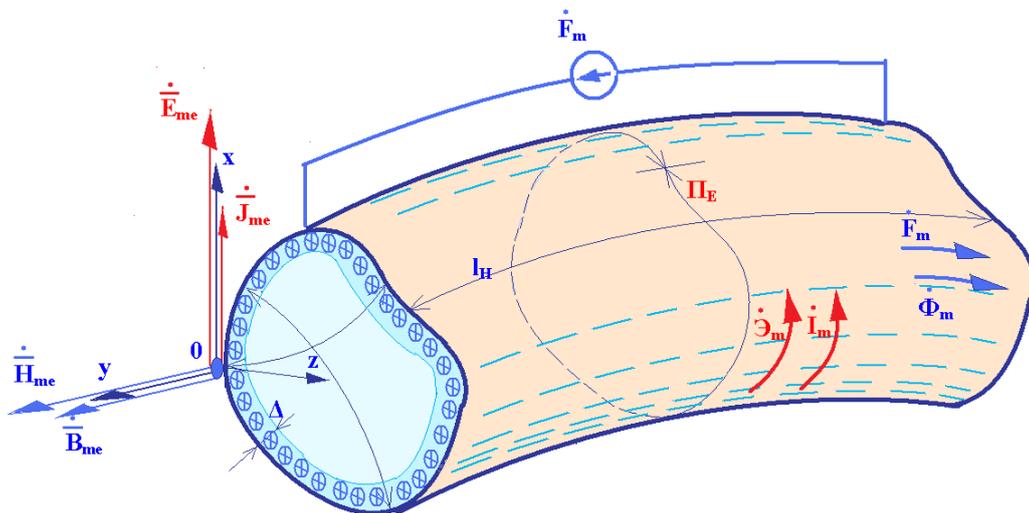


Рис. 15.4. Задача о расчете магнитного потока в массивном брус

$$\mathcal{I}_m = w \overline{I'_m}, \text{ где } \mathcal{I}_m \text{ — ток в витке намагничивающей обмотки, состоящей из } w$$

ВИТКОВ.

Задано:

- МДС (ток) $F_m = I_m$ на длине l_H ;
- размеры бруса: Π_E и l_H и размеры сечения;
- частота: f ;
- свойства материала: μ и σ .

Найти:

- поток Φ_m и магнитное сопротивление Z_Φ ($\text{Ом}^{-1}\text{с}^{-1}$);
- величины поля: $H_{me}, B_{me}, E_{me}, J_{me}$;
- выяснить, во сколько раз увеличится магнитный поток при отсутствии поверхностного эффекта.

Решение.

- 1) Проверка условия для всех размеров:

$$l_i \geq 6\Delta = 6\sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}}.$$

- 2) Магнитное сопротивление с учетом поверхностного эффекта:

$$Z_\Phi = \frac{l_H(1+j)}{\Pi_E\Delta\mu}; \quad |Z_\Phi| = \frac{l_H\sqrt{2}}{\Pi_E\Delta\mu}$$

Без учета поверхностного эффекта (при постоянном токе):

$$Z_{\Phi 0} = \frac{l_H}{S \cdot \mu},$$

где S – площадь поперечного сечения бруса.

- 3) Магнитные потоки:

$$\Phi_m = \frac{F_m}{|Z_\Phi|} \text{ и } \Phi_{m0} = \frac{F_m}{Z_{\Phi 0}}$$

- 4) Напряженность магнитного поля и индукция на поверхности бруса

$$H_{me} = \frac{F_m}{l_H} \text{ и } B_{me} = \mu H_{me}.$$

Напряженность электрического поля и плотность тока на поверхности бруса:

$$J_{me} = |\alpha| H_{me} = |(1+j)k| \cdot H_{me} = \frac{\sqrt{2} H_{me}}{\Delta}, \quad E_{me} = \frac{J_{me}}{\gamma}.$$

5) Потери:

$$P = \frac{J_{me}^2 \Pi_E l_H \Delta}{4\gamma} = \frac{J_{me}^2 V_\Delta}{4\gamma},$$

где $V_\Delta = \Pi_E l_H \Delta$ – объем поверхностного слоя бруса (в предыдущей задаче было: $V_\Delta = \Pi_H l_E \Delta$).

Другой способ: $P = R_l I_m^2 / 2$, где $R_l = X_l = \frac{\Pi_E}{l_H \Delta \gamma}$ (было: $R_l = X_l = \frac{l_E}{\Pi_H \Delta \gamma}$)

Отношение активных сопротивлений, соответствующих первой и второй задачам при $l_E = l_H = l$ и $\Pi_H = \Pi_E = \Pi$:

$$\frac{R_l^{(1)}}{R_l^{(2)}} = \frac{l}{\Pi \Delta \gamma} = \frac{l \Delta \gamma}{\Pi} = \left(\frac{l}{\Pi} \right)^2.$$

6) ЭДС:

$$I_m = F_m, \quad Z_l = \frac{\Pi_E \sqrt{2}}{l_H \Delta \gamma}, \quad \mathcal{E}_m = |Z_l| \cdot I_m.$$

Развертка поверхностного слоя бруса в этом случае выглядит следующим образом:

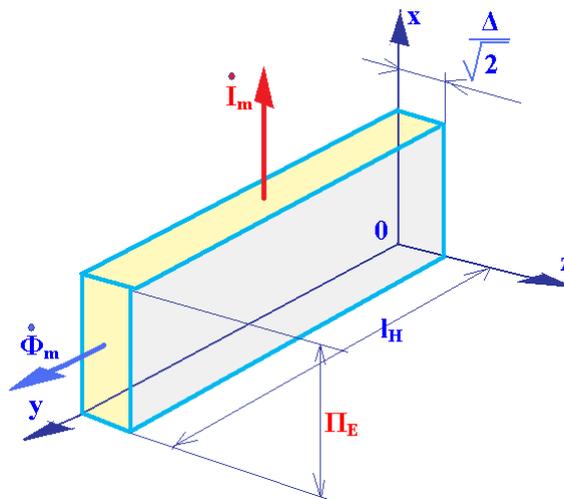


Рис. 15.5. Развертка в декартовой системе координат

Еще один пример**Дано:**

В сердечнике трансформатора задан магнитный поток $\Phi_{1m} = 1,61 \cdot 10^{-3}$ Вб, изменяющийся с частотой $f_1 = 50$ Гц. Сердечник охвачен короткозамкнутым витком, диаметр оси витка равен 400 мм, диаметр сечения витка $d = 30$ мм, материал витка – сталь, $\gamma = 0,3 \cdot 10^{-7}$ (Ом·м) $^{-1}$, $\mu_r = 1000$.

Найти:

- глубину проникновения поля в полупространство из материала витка;
- ток в витке I_m и полное сопротивление при 50 Гц и при постоянном токе;
- значения величин поля на поверхности витка: $H_{me}, B_{me}, E_{me}, J_{me}$

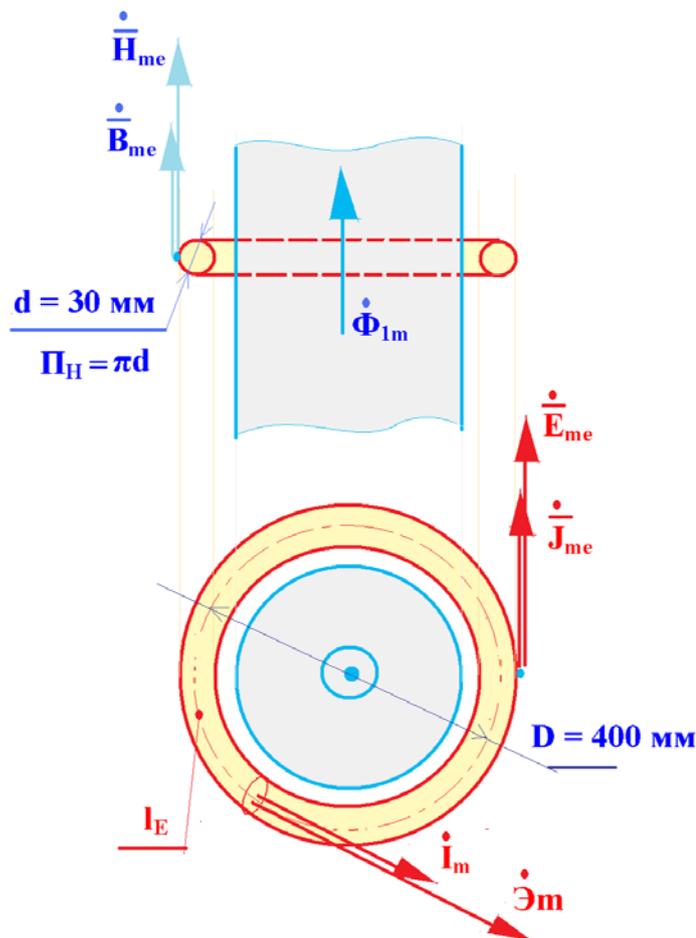


Рис. 15.6. Задача о короткозамкнутом витке на стальном стержне

Задача о короткозамкнутом витке на стержне трансформатора при заданном потоке

$$f_1 := 50 \cdot \text{Гц} \quad \gamma := 0.3 \cdot 10^7 \cdot (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} \quad \mu_r := 1000$$

$$d := 30 \cdot \text{мм} \quad D := 400 \cdot \text{мм} \quad \Phi_{1m} := 1.61 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Вб}$$

Решение

Глубина проникновения поля в полупространство:

$$\Delta := \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} \quad \Delta = 1.299 \text{ мм}$$

Поскольку наименьший размер витка, - диаметр d , - более чем в 6 раз превышает глубину проникновения поля, можно применять расчетные формулы, выведенные для резко выраженного поверхностного эффекта.

$$l_E := \pi \cdot D \quad \Pi_H := \pi \cdot d \quad l_E = 1.257 \times 10^3 \text{ мм} \quad \Pi_H = 94.248 \text{ мм}$$

Активные сопротивления: $Z_1 := \frac{l_E \cdot (1 + i)}{\Pi_H \cdot \gamma \cdot \Delta} \quad |Z_1| = 4.837 \times 10^{-3} \text{ Ом}$

$$Z_{10} := \frac{l_E}{\pi \cdot d^2 \cdot 0.25 \cdot \gamma} \quad |Z_{10}| = 5.926 \times 10^{-4} \text{ Ом}$$

ЭДС и токи

$$\mathcal{E}_m := 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \Phi_{1m} \quad \mathcal{E}_m = 0.506 \text{ В}$$

$$I_m := \frac{\mathcal{E}_m}{|Z_1|} \quad I_m = 104.6 \text{ А}$$

$$I_{m0} := \frac{\mathcal{E}_m}{|Z_{10}|} \quad I_{m0} = 853.5 \text{ А}$$

Величины электрического и магнитного полей на поверхности витка:

$$E_{me} := \frac{\mathcal{E}_m}{l_E} \quad E_{me} = 0.403 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$$

$$J_{me} := \gamma \cdot E_{me} \quad J_{me} = 1.208 \text{ А} \cdot \text{мм}^{-2}$$

$$H_{me} := \frac{J_{me} \cdot \Delta}{\sqrt{2}} \quad H_{me} = 1.11 \times 10^3 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$$

$$B_{me} := \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_{me} \quad B_{me} = 1.394 \text{ Тл}$$

Активное сопротивление и потери:

$$R_1 := \frac{l_E}{\Pi_H \cdot \Delta \cdot \gamma} \quad R_1 = 3.42 \times 10^{-3} \text{ Ом}$$

$$P := R_1 \cdot \frac{I_m^2}{2} \quad P = 18.7 \text{ Вт}$$

или (для проверки):

$$P_2 := \frac{J_{me}^2 \cdot \Pi_H \cdot l_E \cdot \Delta}{4 \cdot \gamma} \quad P_2 = 18.7 \text{ Вт}$$

Рис. 15.7. Фрагмент MathCAD'овского файла с решением задачи о короткозамкнутом витке на стальном стержне

Еще один пример**Дано:**

Имеется стальной тороид, охваченный катушкой с током. Катушка состоит из $w = 500$ витков, ток катушки $I_{1m} = 2,8$ А, частота $f = 50$ Гц. Диаметр оси тороида $D = 400$ мм, диаметр сечения тороида $d = 30$ мм, сталь тороида – та же, что и в предыдущей задаче: $\gamma = 0,3 \cdot 10^{-7} \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$, $\mu_r = 1000$.

Найти:

- глубину проникновения поля в полупространство из материала витка Δ ;
- значения величин поля на поверхности витка: $H_{me}, B_{me}, E_{me}, J_{me}$.

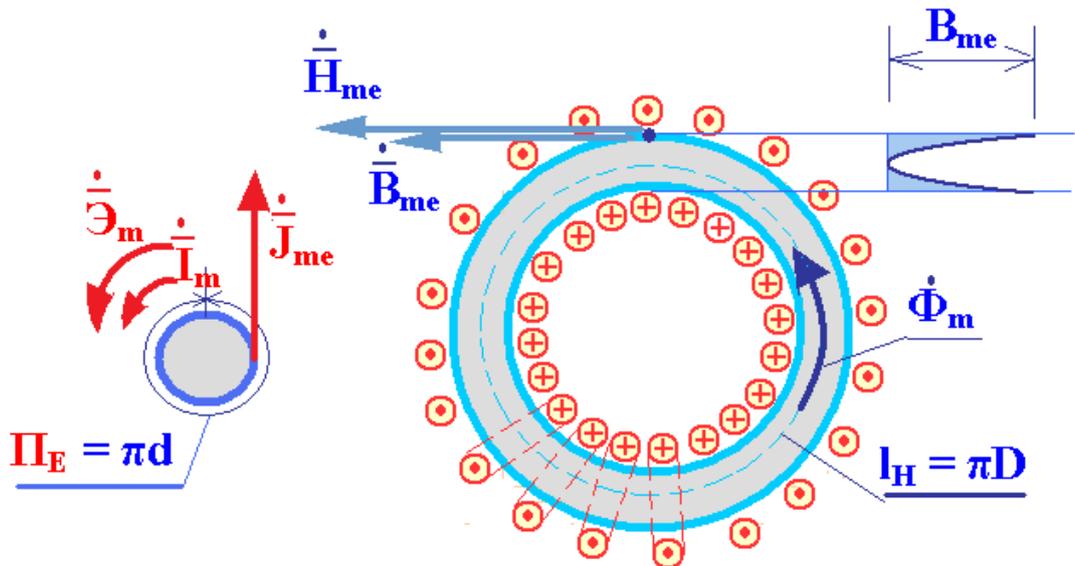


Рис. 15.8. Задача о стальном тороиде

В некотором смысле эта задача является «ортогональной» по отношению к предыдущей. Поскольку материал тороида и частота те же, что и в решенной задаче, очевидно, что и в этом случае имеет место резко выраженный поверхностный эффект.

Задача о стальном тороиде
при заданных ампервитках обмотки возбуждения

$$f_1 := 50 \cdot \text{Гц} \quad \gamma := 0.3 \cdot 10^7 \cdot (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1} \quad \mu_r := 1000$$

$$d := 30 \cdot \text{мм} \quad D := 400 \cdot \text{мм} \quad w_1 := 500 \quad I_{m1} := 2.8 \cdot \text{А}$$

Решение

Глубина проникновения поля в полупространство:

$$\Delta := \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} \quad \Delta = 1.299 \text{ мм} \quad (\text{как и в предыдущей задаче})$$

$$l_H := \pi \cdot D \quad \Pi_E := \pi \cdot d \quad l_H = 1.257 \times 10^3 \text{ мм} \quad \Pi_E = 94.2 \text{ мм}$$

$$I_m := I_{m1} \cdot w_1 \quad F_m := I_m \quad F_m = 1.4 \times 10^3 \text{ А}$$

Напряженность и индукция
магнитного поля
и плотность тока
на поверхности тороида:

$$H_{me} := \frac{F_m}{l_H} \quad H_{me} = 1.114 \times 10^3 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$$

$$B_{me} := \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_{me} \quad B_{me} = 1.4 \text{ Тл}$$

$$J_{me} := \frac{H_{me} \cdot \sqrt{2}}{\Delta} \quad J_{me} = 1.212 \text{ А} \cdot \text{мм}^{-2}$$

Потери в тороиде:

$$P := \frac{J_{me}^2 \cdot \Pi_E \cdot l_H \cdot \Delta}{4\gamma} \quad P = 18.9 \text{ Вт} \quad \text{столько же, сколько и в предыдущей задаче}$$

Магнитный поток в тороиде
при переменном токе:

$$\Phi_m := \frac{\Pi_E \cdot B_{me} \cdot \Delta}{\sqrt{2}} \quad \Phi_m = 1.212 \times 10^{-4} \text{ Вб}$$

Магнитные сопротивления
на переменном и постоянном токе:

$$Z_{\Phi} := \frac{l_H \cdot \sqrt{2}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \Pi_E \cdot \Delta} \quad Z_{\Phi} = 1.155 \times 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$Z_{\Phi 0} := \frac{l_H}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot (\pi \cdot d^2 \cdot 0.25)} \quad Z_{\Phi 0} = 1.415 \times 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

Магнитные потоки -
через магнитные сопротивления:

$$\Phi_m := \frac{F_m}{Z_{\Phi}} \quad \Phi_m = 1.212 \times 10^{-4} \text{ Вб}$$

$$\Phi_{m0} := \frac{F_m}{Z_{\Phi 0}} \quad \Phi_{m0} = 9.896 \times 10^{-4} \text{ Вб}$$

Рис. 15.9. Фрагмент MathCAD'овского файла с решением задачи о стальном тороиде

Развертка поверхностного слоя тороида в системе координат, принятой при рассмотрении поля в полупространстве, показана на следующем рисунке.

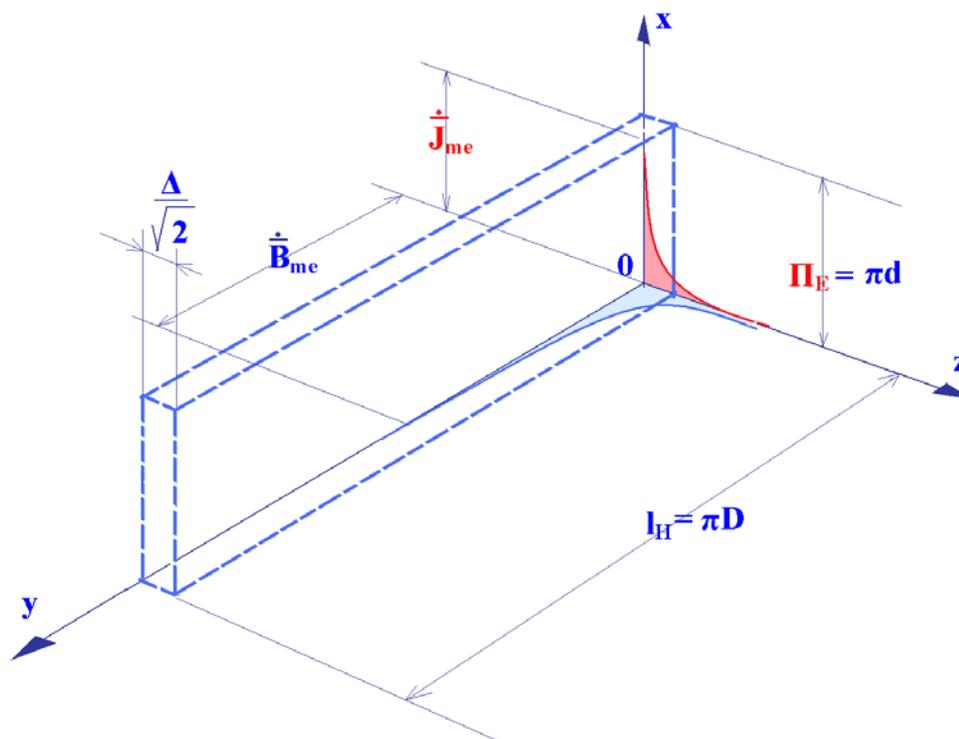


Рис. 15.10. Развертка задачи о тороиде в декартовой системе координат

15.5. Пример численного решения задачи о стальном витке, охватывающем стержень трансформатора (первая из двух решенных выше задач)

Решение получено с помощью конечно-элементной программы *FEMM*. Моделировалось осесимметричное поле при частоте 50 Гц.

На оси симметрии, проходящей через центр плоскости короткозамкнутого витка и перпендикулярной ей, задано однородное условие Дирихле ($A = 0$). На поверхности цилиндрического стержня также задано постоянное значение векторного магнитного потенциала. По условию задачи амплитуда магнитного потока в стержне равна 1,61 мВб. Значение векторного магнитного потенциала,

обеспечивающее такое значение потока, можно найти по среднему значению индукции, выполнив несложные вычисления, но можно поступить и по-другому: задавшись произвольным значением потенциала, рассчитать поле и определить поток в стержне, затем, имея в виду, что поток пропорционален векторному магнитному потенциалу, скорректировать начальное значение потенциала.

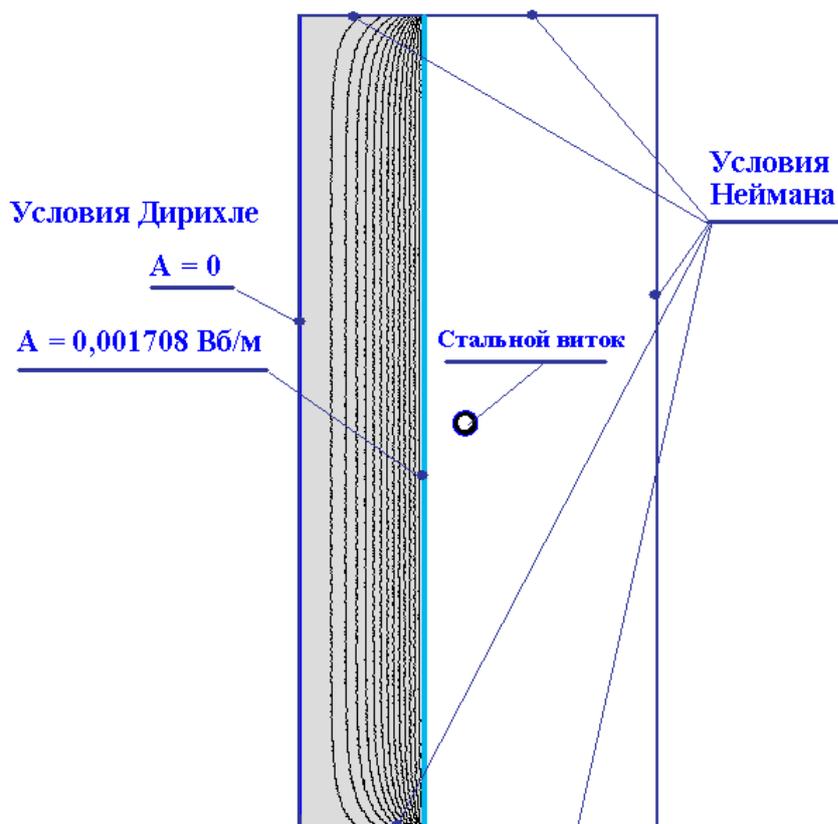


Рис. 15.11. Формулировка и решение задачи о короткозамкнутом витке на стальном стержне в программе FEMM

Общее число узлов модели – 115 тыс., размеры элементов: в сердечнике и в окружающем виток воздушном пространстве – 2 мм, в сечении витка – 1 мм.

Как уже говорилось раньше, при моделировании переменного электромагнитного поля для задания ненасыщенной стали за пределами области задачи на внешней границе модели следует определять условия *Small skin depth* (малая глубина проникновения поля), задавая при этом достаточно высокую относи-

тельную магнитную проницаемость и малую электропроводность. Картина поля, показанная на приведенном рисунке, соответствует $\mu_r = 10^6$ и $\sigma = 0,05$ МСм/м. Если задать электропроводность, равной нулю, искривления силовых линий при подходе к внешней границе практически исчезнут.

На рис. 15.12 показана полученная на модели зависимость плотности тока, индуцированного в витке, от координаты z (отсчет от поверхности витка к центру его поперечного сечения). Как видно на рисунке, и расчетная глубина проникновения поля, и амплитуда плотности тока на поверхности витка, определенные на модели, хорошо совпадают с расчетом по аналитическим выражениям.

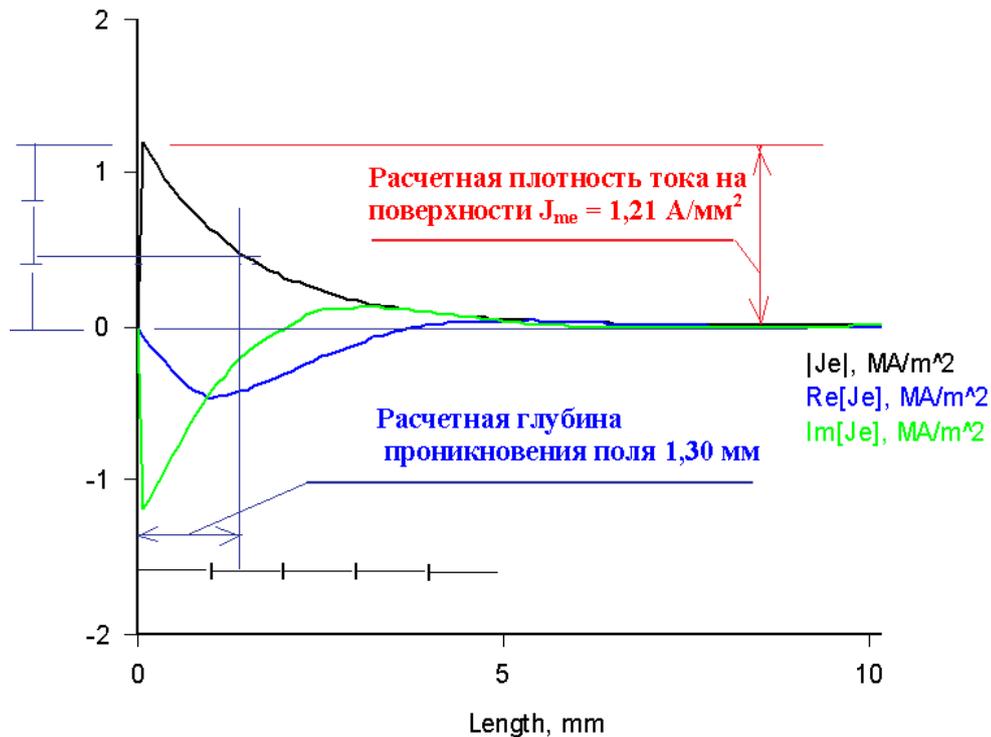


Рис. 15.12. Распределение плотности тока в поперечном сечении тороида по направлению от его поверхности к центру сечения

Достаточно хорошо совпадают с расчетом и определенные на модели потери в витке: 18,13 Вт. Однако значение индукции на поверхности витка, полу-

ченное на модели, отличается от расчетного значения несколько больше – 1,1 Тл против 1,4 Тл.

Можно предложить еще одну конечно-элементную модель для этой задачи. Магнитный поток в стержне можно задать не разностью векторных магнитных потенциалов между осью стержня и его образующей, а, расположив на внешней поверхности стержня токовый слой с постоянной плотностью тока. Значения плотности тока можно найти так же, как и значение векторного магнитного потенциала, используя пропорциональность потока МДС в случае линейной задачи. Полученные на такой модели результаты оказываются весьма близкими к полученным на первой модели, однако время счета заметно увеличивается. Объясняется это тем, что в первом случае точные (окончательные) значения искомой функции (векторного магнитного потенциала) уже при задании начальных условий определены для значительно большего числа узлов модели.